ELEMENTI

DI

GEOMETRIA

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA,

CON NOTE

Di A.-M. Legendre,

MEMBRO DELL'ISTITUTO E DELLA LEGION D'ONORE, DELLA SOCIETÀ REALE DI LONDRA, ec.

DAL FRANCESE VOLTATI IN ITALIANO

DA

RAFFAELE RUBINI

SULLA 20ª EDIZIONE DI PARIGI.

NAPOLI

Per Vincenzo Puzziello Editore-Libraio

Strada Toledo n.° 346 sotto il Palazzo Cavalcanti

1859

TRATTATO

DI

TRIGONOMETRIA

L'oggetto della Trigonometria è quello di *risolvere* i triangoli; di determinare, cioè, i loro lati e i loro angoli, mediante un numero sufficiente di dati.

Nei triangoli rettilinei bisogna conoscere tre delle parti che li compongono, e tra queste dev' esserci sempre almeno un lato. Perchè se non fossero dati che i soli tre angoli, egli è chiaro che tutti i triangoli simili costruiti con questi tre angoli dati soddisferebbero egualmente alla quistione.

Nei triangoli sferici poi le tre parti date possono esser qualunque; anche che fossero tutte tre i lati, o tutte tre gli angoli, sarà sempre possibile determinare il triangolo; imperocchè nei triangoli di questa natura, non si considera la grandezza assoluta dei lati sibbene soltanto il loro rapporto col quadrante, ovvero il numero dei gradi che essi contengono.

Si è già veduto, nei problemi annessi al secondo libro della geometria, come potevasi costruire un triangolo rettilineo, quando erano date tre delle sue parti, e le proposizioni XXIV e XXV del libro V danno egualmente una idea delle costruzioni a farsi per risolvere i casi analoghi dei triangoli sferici. Però queste costruzioni, esatte in teorica, darebbero una mediocre approssimazione mettendole in pra-

tica (1), e ciò a motivo della imperfezione degli strumenti che debbonsi all'uopo adoperare: tali costruzioni vengon denominate *metodi grafici*. I metodi trigonometrici, al contrario, indipendenti da qualunque operazione meccanica, danno la soluzione del problema con tutto quel grado di approssimazione che possa mai desiderarsi: essi sono fondati sulle proprietà di talune rette denominate *seno*, *coseno*, *tangente* ec., per mezzo delle quali si è giunto ad esprimere in maniera semplicissima le relazioni che passano tra i lati e gli angoli.

Esporremo dunque, in primo luogo, le proprietà di queste rette, e le principali formole che ne risultano; formole che sono d'un uso grandissimo in tutti i rami della matematica, e che forniscono alla stessa analisi algebrica de' mezzi di perfezionamento. Applicheremo poscia queste formole alla risoluzione dei triangoli rettilinei e degli sferici.

Divisione della circonferenza

1. Sino a questi ultimi tempi i geometri erano stati d'accordo nel dividere la circonferenza in 360 parti eguali, chiamate *gradi*, il grado in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi* ec. Questo modo di divisione presentava talune facilitazioni nella pratica, a cagione del gran numero dei divisori di 60 e di 360: ma esso era in realtà soggetto all'inconveniente dei numeri complessi, e nuoceva sovente alla rapidità del calcolo.

I dotti, cui devesi l'invenzione del nuovo sistema dei pesi e delle misure, han pensato che vi sarebbe stato un gran vantaggio introducendo la divisione decimale nella misura degli angoli. Perciò hanno eglino considerata, quale unità principale, la quarta parte della circonferenza, ovvero il quadrante, misura dell'angolo retto; ed han divisa questa unità in 100 parti eguali, denominate *gradi*, il grado in 100 *minuti*, ed il minuto in 100 *secondi* (*).

Noi adopereremo d'ora innanzi la nuova divisione, la divisione decimale, cioè, della circonferenza; e siccome le tavole trigonometriche, calcolate secondo questa divisione, non sono abbastanza diffuse, così sarà nostra cura d'aggiungere negli esempi, i risultamenti che danno i calcoli fatti secondo la divisione antica, ovvero la divisione sessa-

(1) Bisogna in effetti far distinzione tra quelle figure che servono a dirigere il ragionamento per la dimostrazione d'un teorema, o la soluzione d'un problema; e quelle figure che si costruiscono per conoscere talune loro dimensioni. Le prime si suppongono esatte, quantunque non esattamente designate; le seconde poi, se non sono con ogni precisione delineate, conducono a risultamenti falsi.

(*) Comunque l'inconveniente dei numeri complessi, avesse, a parer dell'Autore, fatto introdurre, dai dotti inventori del *sistema metrico*, la divisione decimale nella misura degli angoli, pur tutta volta inconvenienti maggiori, cui si è andato incontro volendo adoperare una tale divisione, han fatto tornare in vigore l'antica; che anzi diremo questa non essersi giammai dissusata, e prima quasi mai posta in uso, per forti ragioni, che saggiamente trovansi esposte dal nostro Chiar. Prof. *Amante* in una nota del suo elaborato e completo trattato di Aritmetica alla pag. 174 della 3. edizione.

gesimale della circonferenza. È da tenersi presente, peraltro, che la differenza non cade giammai sul valore dei lati, ma soltanto sul valore, o, anche meglio, sulla espressione degli angoli o degli archi in gradi.

II. I gradi, minuti, e secondi si denotano rispettivamente con i caratteri °, ′, ″: così l'espressione 16° 6′ 75″ rappresenta un arco di 16 gradi, 6 minuti e 75 secondi. Se questo arco si riferisse al quadrante, preso come unità verrebbe espresso dalla frazione 0,160675 (*). Si vede nel tempo stesso che l'angolo misurato da quest'arco stà all'angolo retto::160675 : 1000000, rapporto questo che non sarebbe così facile dedurlo colla divisione antica.

Gli archi e gli angoli sono, nel calcolo, indistintamente espressi da numeri di gradi, minuti, e secondi. Per ciò denoteremo l'angolo retto, ovvero il quadrante, con 100°; due angoli retti, ossia la semicirconferenza con 200°; quattro angoli retti, o tutta la circonferenza con 400°; e così di seguito.

III. Chiamasi *complemento* d'un arco o d'un angolo ciò che resta, sottraendo quest'arco o quest'angolo da 100°. Così l'angolo di 25° 40′ ha per complemento 74° 60′; l angolo di 12° 4′ 62″ per complemento 87° 95′ 38″.

In generale, denotando con A un arco o un angolo qualunque, 100°—*A* è il complemento, dell'arco o dell'angolo *A*. Donde emerge che, se l'arco o l'angolo proposto è maggiore di 100°, il suo complemento è negativo. Così il complemento, di 160° 74′ 10″ è—60° 74′ 10″. In tal caso, il complemento preso positivamente, sarebbe la quantità da sottrarsi dall'arco o dall'angolo dato, perchè il resto fosse uguale a 100°.

I due angoli acuti d'un triangolo rettangolo equivalgono insieme ad un angolo retto; quindi essi son complementi l'un dell'altro.

IV. Chiamasi *supplemento* d'un arco o d'un angolo ciò che rimane dopo aver sottratto l'arco o l'angolo dato da 200°, valore di due angoli retti, ovvero della semicirconferenza. Così, essendo *A* un arco o un angolo qualunque, 200°—*A* è il suo supplemento.

In ogni triangolo un angolo qualunque è il supplemento della somma degli altri due, poichè tutti e tre presi insieme fanno 200°.

Gli angoli dei triangoli, tanto rettilinei quanto sferici, e i lati di quest'ultimi hanno i loro supplementi positivi; perchè essi son sempre minori di 200°.

(*) In effetti un quadrante è uguale a $100° = 10000' = 1000000''$, e l'arco proposto è soltanto di 160675″, onde il rapporto di quest'arco al quadrante è $= \frac{160675}{1000000} = 0,160675$; rapporto che esprime precisamente quanto è l'arco dato rispetto al quadrante preso per unità.

Nozioni generali su i seni, coseni, tangenti, ec.

V. Il *seno* dell'arco AM (*fig.* 1), o dell'angolo ACM, è la perpendicolare MP abbassata da un estremo dell'arco sul diametro che passa per l'altro estremo.

Se dall'estremo del raggio CA si meni la perpendicolare AT a questo raggio e si prolunghi fino a che incontri il raggio CM prolungato esso pure, la retta AT, così determinata, chiamasi ***tangente***, e CT ***secante*** dell'arco AM o dell'angolo ACM.

Le tre rette MP, AT, CT, dipendenti dall'arco AM, e sempre determinate dall'arco AM e dal raggio, si esprimono così: $MP = \text{sen}\, AM$, o $\text{sen}\, ACM$, $AT = \text{tang}\, AM$, o $\text{tang}\, ACM$, $CT = \sec AM$, o $\sec ACM$.

VI. Presso l'arco AD eguale ad un quadrante, se dai punti M e D si menino le rette MQ, DS perpendicolari al raggio CD, l'una terminata da questo raggio, l'altra dal prolungamento del raggio CM; le rette MQ, DS e CS saranno similmente il seno, la tangente e la secante dell'arco MD, complemento di AM; esse vengono, per brevità, distinte col nome di *coseno*, *cotangente* e *cosecante* dell'arco AM; e si esprimono con i simboli $MQ = \cos AM$, o $\cos ACM$, $DS = \cot AM$, o $\cot ACM$, $CS = \text{cosec}\, AM$, o $\text{cosec}\, ACM$. In generale, dinotando con A un arco o un angolo qualunque, si avrà $\cos A = \text{sen}\,(100^\circ - A)$, $\cot A = \text{tang}\,(100^\circ - A)$, $\text{cosec}\, A = \sec(100^\circ - A)$.

Il triangolo MCQ (*fig.* 1), per costruzione, è uguale al triangolo CPM, quindi si ha $CP = MQ$; dunque il triangolo rettangolo CMP, di cui l'ipotenusa è uguale al raggio, ha per cateti MP, CP, il seno ed il coseno dell'arco AM. Quanto ai triangoli CAT, CDS essi son simili ai triangoli eguali CPM, CQM, e perciò sono simili tra loro. Da ciò dedurremo, fra breve, i differenti rapporti che esistono tra le rette sopra definite; ma egli è d'uopo esaminar prima quale è l'ordine con cui tali rette si succedono, a misura che l'arco, cui appartengono, va crescendo da 0° a 200°.

VII. Supponiamo che un estremo dell'arco resti fisso in A, e l'altro estremo M percorra successivamente tutta la semicirconferenza da A sino a B nel senso ADB.

Quando il punto M sta sul punto A, ovvero quando l'arco AM è zero, i tre punti T, M, P si confondono col punto A; dal che vedesi che il seno e la tangente d'un arco zero sono zero anch'esse, e che il coseno di questo stesso arco pareggia il raggio, parimente che avviene per la secante. Laonde, dinotando con R il raggio, si avrà

$$\text{sen}\, 0 = 0, \quad \text{tang}\, 0 = 0, \quad \cos 0 = R, \quad \sec 0 = R.$$

VIII. A misura che il punto M si avanza verso D, il seno, la tangente, e la secante aumentano insieme; mentre all'opposto il coseno, la cotangente, e la cosecante diminuiscono.

Quando il punto M trovasi nel mezzo di AD, ovvero quando l'arco AM ed il suo complemento MD sono ambidue di 50°, il seno MP uguaglia il coseno MQ, ovvero CP, ed il triangolo rettangolo CMP divenendo isoscele, dà la proporzione

$$MP : CM :: 1 : \sqrt{2}, \text{ ossia } \operatorname{sen} 50^\circ : R :: 1 : \sqrt{2},$$

donde si trae

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \cos 50^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2} R \sqrt{2}.$$

Nella stessa circostanza il triangolo CAT diviene isoscele ed uguale al triangolo CDS; donde si vede che la tangente di 50° e la sua cotangente sono l'una e l'altra eguali al raggio, e quindi si ha

$$\operatorname{tang} 50^\circ = \cot 50^\circ = R.$$

IX. Continuando a crescere l'arco AM, aumenterà ancora il seno, sinchè l'arco AM non sia divenuto AD, ossia il quadrante; nel qual caso il seno diviene il raggio CD ed il coseno nullo. Sarà pertanto

$$\operatorname{sen} 100^\circ = R, \ \cos 100^\circ = 0;$$

e può riflettersi che questi valori sono conseguenza di quelli più sopra trovati pel seno e pel coseno dell'arco zero; imperocchè, il complemento di 100° essendo zero, si ha

$$\operatorname{sen} 100^\circ = \cos 0^\circ = R; \ \cos 100^\circ = \operatorname{sen} 0^\circ = 0.$$

In quanto alla tangente, essa aumenta in un modo rapidissimo a misura che il punto M avvicinasi a D, ed in fine quando M coincide con D, non v' esiste propriamente tangente alcuna; poichè le rette AT, CD essendo allora parallele, non possono incontrarsi. Questa circostanza esprimesi dicendo che la tangente di 100° è infinita, e si scrive $\operatorname{tang} 100^\circ = \infty$.

Il complemento di 100° essendo zero, si ha $\operatorname{tang} 0^\circ = \cot 100^\circ$, e $\cot 100 = \operatorname{tang} 0^\circ$. Dunque $\cot 0^\circ = \infty$, e $\cot 100^\circ = 0$.

X. Continuando il punto M ad avanzarsi da D verso B, i seni diminuiscono ed i coseni aumentano. Così si vede che l'arco AM' ha per seno M'P', e per coseno M'Q, ovvero CP'. Ma l'arco M'B è supplemento di AM', perchè AM' + M'B è uguale ad una semicirconferenza; d'altronde se si meni MM' parallela ad AB, egli è chiaro che gli archi AM, BM', compresi tra parallele, sono eguali; come pure le perpendicolari, ossia i seni, MP, M'P'. Dunque *il seno d'un arco o d' un angolo è uguale al seno del supplemento di quest' arco o di quest' angolo.*

L'arco o l'angolo A ha per supplemento $200^\circ - A$; quindi si ha

in generale sen $A = $ sen $(200^\circ - A)$. La stessa proprietà esprimerebbesi ancora per mezzo dell'equazione

$$\text{sen } (100^\circ + B) = \text{sen } (100^\circ - B),$$

essendo B rispettivamente l'arco DM′ o il suo eguale DM.

XI. Gli stessi archi AM′, AM che sono supplementi l'uno dell'altro, e che han seni eguali, hanno anche i coseni uguali CP′, CP; ma conviene osservare che questi coseni son diretti in sensi differenti. Questa differenza di posizione esprimesi nel calcolo coll' opposizione dei segni, di maniera che se si riguardano come positivi, cioè affetti dal segno $+$, i coseni degli archi minori di 100°, converrà riguardare come negativi, cioè affetti dal segno $-$, i coseni degli archi maggiori di 100°. Sarà dunque in generale cos $A = -$ cos $(200^\circ - A)$, oppure cos $(100^\circ - B) = -$ cos $(100^\circ + B)$; vale a dire che *il coseno d'un arco o d' un angolo minore di 100° è uguale al coseno del suo supplemento, preso negativamente*.

Il complemento d'un arco maggiore di 100° essendo negativo (III), non è sorprendente che il seno di questo complemento sia negativo; ma per rendere ancora più chiara questa verità, cerchiamo l'espressione della distanza del punto A alla perpendicolare MP. Se si fa l'arco AM$=x$, si avrà CP $=$ cos x, e la distanza cercata AP $=$ R $-$ cos x. La stessa formola deve esprimere ancora la distanza del punto alla retta MP, qualunque sia la grandezza dell'arco AM, la cui origine è al punto A. Supponiamo dunque che il punto M venga in M′, in modo che x dinoti l'arco AM′; avrassi ancora in questo caso AP′$=$ R $-$ cos x; dunque cos $x =$ R $-$ AP′ $=$ AC $-$ AP′ $= -$ CP′; il che fa vedere che cos x è in tal caso negativo; e poichè CP′ $=$ CP $=$ cos $(200^\circ - x)$, si ha cos $x = -$ cos $(200^\circ - x)$, come più sopra si è trovato.

Da ciò si vede che un angolo ottuso ha lo stesso seno e lo stesso coseno dell' angolo acuto che gli serve di supplemento, con la sola differenza che il coseno dell'angolo ottuso debb' essere affetto del segno $-$. Così si ha
sen $150^\circ =$ sen $50^\circ = \frac{1}{2} R\sqrt{2}$, e cos $150^\circ = -$ cos $50^\circ = -\frac{1}{2} R\sqrt{2}$.

Riguardo all' arco ADB eguale alla semicirconferenza, è facile vedere che il suo seno è nullo, ed il coseno eguale al raggio preso negativamente; si ha dunque sen $200^\circ = 0$, e cos $200^\circ = -R$. Questo medesimo risultamento ottiensi ancora dalle due formole sen $A =$ sen $(200^\circ - A)$, e cos $A = -$ cos $(200^\circ - A)$, quando vi si fa $A = 200^\circ$.

XII. Esaminiamo ora quel che divenga la tangente d'un arco maggiore di 100°. Secondo la definizione di questa retta, essa vien determinata dal concorso delle rette AT, CM′ (*fig.* 1). Queste rette non s' incontrano nel senso AT, ma nel senso opposto AV, donde si vede che la tangente d' un arco maggiore di 100° è negativa. Al-

tronde, se si osserva che AV è la tangente dell'arco AN, supplemento di AM′ (poichè NAM′ è una semicirconferenza), se ne concluderà che *la tangente d'un arco o d'un angolo maggiore di 100° è uguale a quella del suo supplemento, presa negativamente; di maniera che si ha*

$$\tan A = -\tan(200^\circ - A).$$

Lo stesso avviene per la cotangente rappresentata da DS′ che è uguale, e contraria a DS, cotangente di AM. Si ha dunque

$$\cot A = -\cot(200^\circ - A).$$

Le tangenti e le cotangenti sono dunque negative, parimente che i coseni, da 100° sino a 200°. Ed in quest'ultimo limite si ha

$$\tan 200^\circ = 0,\ \cot 200^\circ = -\cot 0^\circ = -\infty.$$

XIII. Nella trigonometria, per quanto spetta alla risoluzione dei triangoli, non v'è luogo a considerare i seni, coseni, ec. degli archi o degli angoli maggiori di 200°, perchè gli angoli, tanto dei triangoli rettilinei quanto degli sferici, ed i lati di questi ultimi sono sempre compresi tra 0° e 200°. Ma in diverse applicazioni delle formole trigonometriche alla geometria, non è raro il dover considerare degli archi maggiori della circonferenza, e degli archi che comprendessero anche più circonferenze. Egli è dunque necessario trovar l'espressione dei seni e dei coseni di questi archi, qualunque possa essere la loro lunghezza.

Osserviamo in primo luogo che due archi eguali e di segno contrario, come AM, AN, hanno seni eguali, e di segni contrarî, i quali sono MP, PN; mentre che il coseno CP è lo stesso per l'uno e per l'altro. Si ha dunque in generale

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$

formole che serviranno ad esprimere i seni e coseni degli archi negativi.

Da 0° sino a 200° i seni sono sempre positivi perchè situati tutti da un medesimo lato del diametro AB; da 200° sino a 400° i seni sono negativi, perchè son situati dall'altro lato di questo stesso diametro. Sia ABN′ $= x$ un arco maggiore di 200°; il suo seno P′N′ sarà uguale a PM, seno dell'arco AM $= x - 200^\circ$, dunque si ha in generale

$$\text{sen}\,x = -\text{sen}(x - 200^\circ).$$

Questa formola darebbe i seni degli archi compresi tra 200° e 400° per mezzo dei seni degli archi compresi tra 0° e 200°; ed in particolare dà sen 400° $=$ − sen 200° $= 0$; in effetti egli è evidente che se un arco è uguale alla circonferenza intera, i due estremi si confondono in uno stesso punto, ed il seno riducesi a zero.

Non è meno evidente che, se ad un arco qualunque AM si aggiungano una o più circonferenze, si ricadrà esattamente sul punto M, e l'arco così aumentato avrà lo stesso seno dell'arco AM; dunque se dinotisi con C la circonferenza intera, ovvero 400°, si avrà

$$\text{sen}\,x = \text{sen}(C + x) = \text{sen}(2C + x) = \text{sen}(3C + x) = \text{ec.}$$

La stessa cosa avrà luogo per i coseni, per le tangenti, ec.

Ora, qualunque sia l'arco proposto x, è facil vedere che il suo seno potrà sempre esprimersi con un segno conveniente, per mezzo del seno d'un arco minore di 100°. Perchè si può, in primo luogo, togliere dall'arco x tante volte 400° per quante può esserci contenuto, e indicando con y il resto, sarà sen $x =$ sen y. In seguito, se y è maggiore di 200°, si farà $y = 200^\circ + z$, e si avrà sen $y = -$ sen z. Tutti i casi son dunque ridotti a quello in cui l'arco proposto è minore di 200°; e come si ha d'altronde sen $(100^\circ + x) =$ sen $(100^\circ - x)$, egli è chiaro che se essi si riducono in ultima analisi, al caso di un arco compreso tra 0° e 100°.

XIV. I coseni riduconsi sempre ai seni in virtù della formola $\cos A = \text{sen}\,(100^\circ - A)$, oppure, se si volesse, in virtù dell'altra $\cos A = \text{sen}\,(100^\circ + A)$; quindi è, che sapendo valutare i seni in tutti i casi possibili, si sapranno valutare anche i coseni. Del resto, vedesi direttamente per mezzo della figura che i coseni negativi son separati dai positivi dal diametro DE, in guisa che tutti gli archi il cui estremo cade a sinistra di DE hanno un coseno positivo, mentre che quelli il cui estremo cade a dritta hanno un coseno negativo (*).

Così da 0° a 100° i coseni son positivi, da 100° a 300° sono negativi, da 300° a 400° divengono nuovamente positivi: e dopo una rivoluzione intera, prendono gli stessi valori e segni come nella rivoluzione precedente, perchè si ha così

$$\cos\,(400^\circ + x) = \cos x.$$

Dopo tali dichiarazioni è facile vedere che i seni ed i coseni degli archi multiplici del quadrante hanno i valori seguenti:

$\text{sen}\ 0^\circ = 0$	$\text{sen}\ 100^\circ = R$	$\cos\ 0^\circ = R$	$\cos\ 100^\circ = 0$
$\text{sen}\ 200^\circ = 0$	$\text{sen}\ 300^\circ = -R$	$\cos\ 200^\circ = -R$	$\cos\ 300^\circ = 0$
$\text{sen}\ 400^\circ = 0$	$\text{sen}\ 500^\circ = R$	$\cos\ 400^\circ = R$	$\cos\ 500^\circ = 0$
$\text{sen}\ 600^\circ = 0$	$\text{sen}\ 700^\circ = -R$	$\cos\ 600^\circ = -R$	$\cos\ 700^\circ = 0$
$\text{sen}\ 800^\circ = 0$	$\text{sen}\ 900^\circ = R$	$\cos\ 800^\circ = R$	$\cos\ 900^\circ = 0$
ec.	ec.	ec.	ec.

In generale, dinotando con k un numero intero qualunque, si avrà:

$\text{sen}\ 2k\ 100 = 0$	$\cos\,(2k+1)\ 100^\circ = 0$
$\text{sen}\,(4k+1)\ 100^\circ = R$	$\cos\ 4k\ 100^\circ = R$
$\text{sen}\,(4k-1)\ 100^\circ = -R$	$\cos\,(4k+2)\ 100^\circ = -R$

Il detto fin ora intorno ai seni e coseni, ci dispensa di entrare in ulteriori particolari dettagli sulle tangenti cotangenti, ec. degli archi maggiori di 200°; perchè i valori di queste quantità e i loro segni sono sempre facili a dedursi da quelli dei seni e coseni degli stessi archi, come si vedrà dalle formole che qui appresso anderemo ad esporre.

Teoremi e formole concernenti i seni, i coseni, le tangenti ec.

XV. *Il seno d'un arco è la metà della corda, che sottende l'arco doppio.*

In fatti il raggio CA (*fig.* 1), perpendicolare ad MN, divide in due parti uguali la corda MN e l'arco sotteso MAN, dunque MP, seno dell'arco AM, è la metà della corda MN, che sottende l'arco MAN doppio di AM.

Da ciò consegue immediatamente che, essendo la corda che sottende l'arco sesta parte della circonferenza, eguale al raggio, il seno dell'arco $\frac{400^\circ}{12}$, ovvero $\text{sen}\ 33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{2} R$; vale a dire che *il seno della terza parte dell'angolo retto è uguale alla metà del raggio.*

XVI. *La somma del quadrato del seno e quello del coseno d'un arco è uguale al quadrato del raggio, di talchè si ha in generale* $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = R^2$ (1).

Una tal proprietà è conseguenza del triangolo rettangolo CMP, in cui si ha $\overline{MP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$.

(*) Sempre nell'ipotesi che l'origine comune degli archi fosse il punto A messo a sinistra del diametro DE.

(1) Col simbolo $\text{sen}^2 A$ intendesi rappresentato il quadrato di sen A; così ancora $\cos^2 A$ rappresenta il quadrato di $\cos A$.

Mediante questa proprietà si può dedurre facilmente il seno di un arco, quando n'è dato il coseno, e viceversa. In fatti la formola precedente $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = R^2$, secondo che si risolve rispetto a sen A, o rispetto a cos A, dà le altre due

$$\text{sen}\, A = \pm \sqrt{R^2 - \cos^2 A}, \quad \cos A = \pm \sqrt{R^2 - \text{sen}^2 A}.$$

Il doppio segno di queste formole deriva dal perchè lo stesso seno MP corrisponde a due archi AM, AM′, i cui coseni CP e CP′ sono eguali e di segno contrario; allo stesso modo che il medesimo coseno CP corrisponde a due archi AM, AN, i cui seni MP, PN sono similmente eguali e di segno contrario.

Così, per esempio, avendo più sopra trovato che sen $33^\circ \frac{1}{3} = \frac{1}{2} R$, si dedurrà facilmente dalla formola $\cos A = \sqrt{R^2 - \text{sen}^2 A}$, che cos $33^\circ \frac{1}{3}$, ovvero sen $66^\circ \frac{2}{3} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} R^2} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$.

XVII. Essendo dati il seno ed il coseno dell'arco A, si possono trovare la tangente, la secante, la cotangente e la cosecante dello stesso arco, mediante le formole

$$\text{tang}\, A = \frac{R\, \text{sen}\, A}{\cos A}, \quad \sec A = \frac{R^2}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{R \cos A}{\text{sen}\, A}, \quad \text{cosec}\, A = \frac{R^2}{\text{sen}\, A}.$$

In effetti i triangoli simili CPM, CAT, CDS, danno le proporzioni:

$$\text{CP} : \text{PM} :: \text{CA} : \text{AT}, \text{ ovvero } \cos A : \text{sen}\, A :: R : \text{tang}\, A = \frac{R\, \text{sen}\, A}{\cos A},$$

$$\text{CP} : \text{CM} :: \text{CA} : \text{CT}, \text{ ovvero } \cos A : R :: R : \sec A = \frac{R^2}{\cos A},$$

$$\text{PM} : \text{CP} :: \text{CD} : \text{DS}, \text{ ovvero } \text{sen}\, A : \cos A :: R : \cot A = \frac{R \cos A}{\text{sen}\, A},$$

$$\text{PM} : \text{CM} :: \text{CD} : \text{CS}, \text{ ovvero } \text{sen}\, A : R :: R : \text{cosec}\, A = \frac{R^2}{\text{sen}\, A},$$

dalle quali proporzioni si deducono le quattro formole soprascritte. Del resto si può osservare che le due ultime formole, cioè

$\cot A = \frac{R \cos A}{\text{sen}\, A}$, $\text{cosec}\, A = \frac{R^2}{\text{sen}\, A}$, si dedurrebbero dalle prime, ponendovi semplicemente $100^\circ - A$ in luogo di A.

Tutte quattro le formole poi daranno i valori e i segni propri delle tangenti, secanti, ec. per qualunque arco, di cui si conoscano il seno ed il coseno; e come la legge progressiva dei seni e coseni, secondo i differenti archi cui si riferiscono, è stata sufficientemente sviluppata nel capitolo precedente, così non resta nulla a desiderare sulla legge che seguono parimente le tangenti, secanti, ec.

Col loro mezzo si possono confermare ancora molti risultamenti, già ottenuti, relativamente alle tangenti; per esempio se si fa $A=100^o$, si avrà sen $A=R$, cos $A=0$, e quindi tang $100^o=\frac{R^2}{0}$, espressione che dinota una quantità infinita; perchè R^2 diviso per una quantità piccolissima darebbe un quoziente grandissimo; dunque R^2 diviso per zero dà un quoziente maggiore di qualunque quantità finita. E poichè zero può esser preso col segno + o col segno —, sì avrà il valore ambiguo tang $100^o=\pm\infty$.

Sia ancora $A=200^o-B$, e sarà sen $A=$ sen B, e cos $A=-$ cos B, dunque tang $(200^o-B)=\frac{R \text{ sen } B}{-\cos B}=-\frac{R \text{ sen } B}{\cos B}=-$ tang B; il che si accorda coll' esposto nell'articolo XII.

XVIII. Le formole dell'articolo precedente combinate tra loro e coll' equazione $\text{sen}^2 A+\cos^2 A=R^2$, ne forniscono alcune altre meritevoli d' attenzione.

Si ha primamente

$$R^2+\text{tang}^2 A=R^2+\frac{R^2 \text{ sen}^2 A}{\cos^2 A}=\frac{R^2(\cos^2 A+\text{sen}^2 A)}{\cos^2 A}=\frac{R^4}{\cos^2 A}=\sec^2 A;$$

dunque $R^2+\text{tang}^2 A=\sec^2 A$, formola questa che si dedurrebbe immediatamente dal triangolo CAT. Si avrebbe parimente per mezzo delle formole, o per mezzo del triangolo rettangolo CDS, $R^2+\cot^2 A=\text{cosec}^2 A$.

In fine, se si moltiplicano tra loro le formole tang $A=\frac{R \text{ sen } A}{\cos A}$, per cot $A=\frac{R \cos A}{\text{sen } A}$, si avrà tang $A\times$ cot $A=R^2$, e questa formola dà cot $A=\frac{R^2}{\text{tang } A}$, e tang $A=\frac{R^2}{\cot A}$. Si avrebbe parimente cot $B=\frac{R^2}{\text{tang } B}$. Dunque cot A : cot B : : tang B : tang A; vale a dire che *le cotangenti di due archi stanno tra loro in ragione inversa delle tangenti.*

La formola cot $A\times$ tang $A=R^2$ dedurrebbesi immediatamente dal paragone dei triangoli simili CAT, CDS, i quali danno

AT : CA : : CD : DS, ovvero tang A : R : : R : cot A.

XIX. *Dati i seni e i coseni di due archi* a *e* b, *si possono determinare i seni e i coseni della somma e della differenza di questi archi, col mezzo delle formole seguenti:*

$$\text{sen}(a+b)=\frac{\text{sen } a \cos b+\text{sen } b \cos a}{R}$$

$$\text{sen}(a-b)=\frac{\text{sen } a \cos b-\text{sen } b \cos a}{R}$$

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a \cos b-\text{sen } a \text{ sen } b}{R}$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a \cos b+\text{sen } a \text{ sen } b}{R}$$

Sia il raggio $AC=R$ (*fig.* 2), l'arco $AB=a$, l'arco $BD=b$, e in conseguenza $ABD=a+b$. Dai punti B e D si abbassino le perpendicolari BE, DF sul raggio AC; dal punto D si meni la DI perpendicolare a BC; in fine dal punto I si menino IK perpendicolare ed IL parallela ad AC.

I triangoli simili BCE, ICK danno le proporzioni

$$CB : CI :: BE : IK \text{, ovvero } R : \cos b :: \operatorname{sen} a : IK = \frac{\operatorname{sen} a \cos b}{R},$$

$$CB : CI :: CE : CK \text{, ovvero } R : \cos b :: \cos a : CK = \frac{\cos a \cos b}{R}.$$

Similmente i triangoli DIL, CBE, perchè hanno i lati rispettivamente perpendicolari, son simili, e danno le proporzioni

$$CB : DI :: CE : DL \text{, ovvero } R : \operatorname{sen} b :: \cos a : DL = \frac{\cos a \operatorname{sen} b}{R},$$

$$CB : DI :: BE : IL \text{, ovvero } R : \operatorname{sen} b :: \operatorname{sen} a : IL = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{R},$$

Ma si ha
$IK+DL=DF=\operatorname{sen}(a+b)$, e $CK-IL=CF=\cos(a+b)$.
Dunque sarà

$$\operatorname{sen}(a+b)=\frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{R},$$

$$\cos(a+b)=\frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{R},$$

E da queste due formole sarebbe facile dedurre le altre due relative a $\operatorname{sen}(a-b)$, e $\cos(a-b)$; ma queste ultime possono trovarsi immediatamente per mezzo della stessa figura. In effetti, se si prolunga il seno DI, sino a che incontri la circonferenza in M, si avrà $BM=BD=b$, ed $MI=ID=\operatorname{sen} b$. Pel punto M si menino MP perpendicolare ed MN parallela ad AC; e poichè $MI=DI$, si avrà $MN=IL$, ed $IN=DL$. Ma si ha $IK-IN=MP=\operatorname{sen}(a-b)$, e $CK+MN=CP=\cos(a-b)$, dunque si avrà

$$\operatorname{sen}(a-b)=\frac{\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}{R},$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{R},$$

Son queste le formole che ci avevamo proposto dimostrare.

Potrebbesi dubitare che la proposizione precedente non fosse generale a sufficienza, dacchè la figura, di cui ci siam serviti, suppone gli archi a e b, ed anche la loro somma $a+b$ minore di 100^0. Ma egli è facile provare come la stessa dimostrazione estendasi ad una supposizione qualunque sul valore degli archi a e b. In effetti considerando dapprima il caso in cui, a e b essendo minori di 100^0, la loro somma $a+b$ è maggiore di 100^0, facilmente si vede che in tal caso il punto F cadrà sul prolungamento

di AC, ed il solo cambiamento a farsi nella dimostrazione, sarebbe quello di prendere $\cos (a+b) = -CF$; ma come si avrebbe in pari circostanza $CF = IL - CK$, ne risulta sempre $\cos (a+b) = CK - IL$, ovvero

$$R \cos (a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Supponiamo ora che le formole

$$R \operatorname{sen} (a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$R \cos (a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

sieno riconosciute esatte per tutti i valori di a e di b, minori dei limiti rispettivi A e B; dico che esse avran luogo ancora quando questi limiti diverranno $100^o + A$ e B.

Per ciò osserveremo, che, qualunque sia l'arco x, si ha sempre

$$\operatorname{sen} (100^o+x) = \cos x, \ \cos (100^o+x) = - \operatorname{sen} x.$$

Queste equazioni in fatti son manifeste quando $x < 100^o$, e possiamo assicurarci facilmente che esse han luogo per tutti i valori di x, mediante la (*fig.* 18), in cui MM'' ed M'M''' sono due diametri perpendicolari tra loro, e in cui si possono prendere per x successivamente i valori AM, ADM', ADBM'', ADBEM''', oppure questi valori medesimi aumentati di quante si vogliano circonferenze.

Ciò posto sia $x = m + b$, e si avrà

$$\operatorname{sen} (100^o+m+b) = \cos (m+b).$$
$$\cos (100^o+m+b) = - \operatorname{sen} (m+b).$$

Ma, secondo l'ipotesi, i valori dei secondi membri di queste eguaglianze son conosciuti, finchè m e b non eccedono i limiti A e B; dunque nella stessa ipotesi si avrà

$$R \operatorname{sen} (100^o+m+b) = \cos m \cos b - \operatorname{sen} m \operatorname{sen} b,$$
$$R \cos (100^o+m+b) = - \operatorname{sen} m \cos b - \cos m \operatorname{sen} b.$$

Sia $100^o + m = a$; e poichè $\operatorname{sen} (100^o+m) = \cos m$, e $\cos (100^o+m) = - \operatorname{sen} m$, ne risulterà $\cos m = \operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} m = - \cos a$; dunque, facendo queste sostituzioni nelle due equazioni precedenti, si avrà

$$R \operatorname{sen} (a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$R \cos (a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Donde si vede che queste formole, supposte verificate per tutti i valori di a e b minori dei limiti rispettivi A e B, son ora dimostrate vere per i limiti più estesi, cioè $a < 100^o + A$, $b < B$. Ma per la stessa ragione, il limite di b può essere avanzato per 100^o; quindi anche nuovamente quello di a, e così continuando indefinitamente; dunque le formole in quistione han luogo qualunque sia la grandezza degli archi a e b.

Ora l'arco a essendo composto della somma de'due archi $a - b$ e b, si avrà, dietro le formole precedenti,

$$R \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} (a-b) \cos b + \cos (a-b) \operatorname{sen} b,$$
$$R \cos a = \cos (a-b) \cos b - \operatorname{sen} (a-b) \operatorname{sen} b.$$

E da queste si deduce

$$R \operatorname{sen} (a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$R \cos (a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

formole che hanno ancora luogo per tutti i valori di a e b.

XX. Se nelle formole dell'articolo precedente si fa $b = a$, la prima e la terza daranno

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos a}{R}, \quad \cos 2a = \frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{R},$$

Queste formole serviranno a trovare il seno ed il coseno d'un arco doppio, quando si conoscano il seno ed il coseno dell'arco semplice; ciò che costituisce il problema della duplicazione dell'arco.

Reciprocamente per dividere un arco dato a in due parti eguali, poniamo nelle stesse formole $\frac{1}{2}a$ in luogo di a; avremo così

$$\text{sen } a = \frac{2 \text{ sen } \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{R}, \quad \cos a = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a}{R}.$$

Or abbiamo $\cos^2 \frac{1}{2} a + \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = R^2$ (XVI), e per la seconda delle formole precedenti $\cos^2 \frac{1}{2} a - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = R \cos a$; quindi si avrà

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cos a, \quad \text{sen}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cos a$$

ed estraendo la radice, si avrà in fine

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cos a}, \quad \text{sen } \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cos a}.$$

Così, facendo $a = 100°$, e perciò $\cos a = 0$, si trova $\text{sen } 50° = \cos 50° = \sqrt{\frac{1}{2} R^2} = R \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$; facendo in seguito $a = 50°$, il che dà $\cos a = R \sqrt{\frac{1}{2}}$, si avrà

$$\text{sen } 25° = R\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \text{ e } \cos 25° = R\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

XXI. Si possono avere i valori di $\text{sen } \frac{1}{2} a$ e $\cos \frac{1}{2} a$ espressi ancora per mezzo di $\text{sen } a$, in luogo di $\cos a$, il che può esser utile in molte occasioni; questi valori sono dati dalle formole

$$\text{sen } \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + R \text{ sen } a} - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - R \text{ sen } a},$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + R \text{ sen } a} - \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - R \text{ sen } a}.$$

In effetti, elevando la prima a quadrato, si ha

$$\text{sen}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{4} (R^2 + R \text{ sen } a) - \frac{1}{2} \sqrt{R^4 - R^2 \text{ sen}^2 a} + \frac{1}{4} (R^2 - R \text{ sen } a) =$$
$$\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R \cos a;$$

similmente, elevando a quadrato la seconda, si troverà

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R \cos a,$$

valori questi che si accordano colle espressioni di $\text{sen} \frac{1}{2} a$ e $\cos \frac{1}{2} a$ trovate più sopra. Bisogna intanto osservare che se $\cos a$ fosse negativo, il radicale $\sqrt{R^2 - R \text{ sen } a}$ dovrebbe esser preso con un segno contrario nei valori di $\text{sen } \frac{1}{2} a$ e $\cos \frac{1}{2} a$; il che cangerebbe l'una formola nell'altra (*).

(*) Ciascuna di queste formole può dedursi anche direttamente. Abbiamo in fatti per la prima

$$\text{sen } \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} \cos R a}.$$

XXII. Coll'aiuto di queste formole egli è facile determinare i seni e coseni di tutte le decime parti del quadrante.

E primieramente sia sen $20^0 = x$, e sarà $2x$ la corda dell' arco di 40^0, ovvero il lato del decagono regolare inscritto; or questo lato è uguale al più grande dei due segmenti del raggio diviso in estrema e media ragione (pr. 3, lib. 3); dunque, se si fa il raggio eguale ad 1, si avrà $1 : 2x :: 2x : 1-2x$. Da ciò si deduce $4x^2 = 1 - 2x$, ovvero $x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}$, ed x, ovvero sen $20^0 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$. Questo valore elevato a quadrato dà sen $20^0 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$, dunque $1 - \text{sen}^2 20^0$, ovvero

$\cos^2 20^0 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$. Ma $\cos^2 a - \text{sen}^2 a = \cos^2 a$, dunque

$$\cos 40^0, \text{ ovvero sen } 60^0 = \frac{4+4\sqrt{5}}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Ora se nelle formole del n.° XXI si faccia $R=1$, $a=20^0$, e sen $a = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$, se ne dedurrà

$$\text{sen } 10^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\cos 10^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Se in seguito si fa nelle medesime formole $a=60^0$, e sen $a = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$, si avrà

$$\text{sen } 30^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\cos 30^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Con questi valori e con quelli, già conosciuti, di sen 50^0 e di sen 100^0, si può formare lo specchietto segnente:

---

e come $\cos a = \sqrt{R^2 - \text{sen}^2 a}$, così sarà

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2 - \text{sen}^2 a}}$$

$$= \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{R^4 - R^2 \text{sen}^2 a}}.$$

Aggiungendo ora sotto il radicale il termine $\frac{1}{4}R \text{ sen } a - \frac{1}{4}R \text{ sen } a$, che non lo altera, avremo

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(R^2 + R \text{ sen } a) - \tfrac{1}{4}(R^2 - R \text{ sen } a) - \tfrac{1}{2}\sqrt{R^4 - R^2 \text{sen}^2 a}};$$

sotto questa forma la quantità sottoposta al radicale è un quadrato perfetto, e quindi estrattane la radice si ottiene

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} a = \pm (\tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 + R \text{ sen } a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - R \text{ sen } a}).$$

In un modo analogo operando sulla formola $\cos \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R \cos a}$, trovasi

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \pm (\tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 + R \text{ sen } a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{R^2 - R \text{ sen } a}).$$

$\text{sen } 0^\circ = \cos 100^\circ = 0,$

$\text{sen } 10^\circ = \cos 90^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$

$\text{sen } 20^\circ = \cos 80^\circ = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$

$\text{sen } 30^\circ = \cos 70^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$

$\text{sen } 40^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$

$\text{sen } 50^\circ = \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2},$

$\text{sen } 60^\circ = \cos 40^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$

$\text{sen } 70^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$

$\text{sen } 80^\circ = \cos 20^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$

$\text{sen } 90^\circ = \cos 10^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$\text{sen } 100^\circ = \cos 0^\circ = 1.$

Questi valori possono semplificarsi, poichè si ha $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, e $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (*); donde si vede che riguardando come cogniti $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}$, non restano a farsi che quattro estrazioni di radici quadrate, per avere i valori de' seni e coseni di tutti gli archi multiplici di 10°.

XXIII. Da queste formole si ricavano due conseguenze osservabili: 1.° Essendo $2 \text{ sen } 40^\circ$ la corda di 80°, ovvero il lato del pentagono regolare inscritto, questo lato sarà perciò uguale ad $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, ed il suo quadrato $= \frac{1}{4}(10-2\sqrt{5})$. Similmente il lato del decagono regolare $= 2 \text{ sen } 20^\circ = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, ed il suo quadrato $= \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$; ma $\frac{1}{4}(10-2\sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$. Dunque la *somma del quadrato del raggio e del quadrato del lato del decagono è uguale al quadrato del lato del pentagono regolare inscritto.*

2.° Tra i seni delle divisioni decimali impari del quadrante v'ha questa relazione

$$\text{sen } 90^\circ + \text{sen } 30^\circ + \text{sen } 10^\circ = \text{sen } 50^\circ + \text{sen } 70^\circ,$$

e le divisioni pari danno similmente

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen } 20^\circ + \frac{1}{2}.$$

Ma queste formole non sono che de' casi particolari, e si può dimostrare che, essendo x un arco d'un numero qualunque di gradi, si ha

(*) In fatti si ha identicamente

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6}{2} \pm \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{5}},$$

ma $\frac{5}{2} = (\frac{1}{2}\sqrt{10})^2$, $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2$, $\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10}$, dunque

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{5}} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\sqrt{10})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10}}.$$

Sotto questa forma la quantità sottoposta al radicale è il quadrato di $\frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$; estraendo dunque la radice, si avranno i soprascritti valori di $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ e $\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

$\text{sen}\,(100^0 - x) + \text{sen}\,(20^0 + x) + \text{sen}\,(20^0 - x) = \text{sen}\,(60^0 - x) + \text{sen}\,(60^0 + x)$.

In effetti facendo $R=1$ nelle formole di sen $(a+b)$, (sen $a-b$) e addizionandole ottiensi

$$\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b) = 2\,\text{sen}\,a\,\cos b,$$

e ponendo una volta $a=20^0$, $b=x$, ed un'altra volta $a=60^0$, $b=x$; avremo

$$\text{sen}\,(20^0+x) + \text{sen}\,(20^0-x) = 2\,\text{sen}\,20^0\cos x$$
$$\text{sen}\,(60^0+x) + \text{sen}\,(60^0-x) = 2\,\text{sen}\,60^0\cos x.$$

Or sottraendo, la prima dalla seconda, queste due equazioni emerge

$$\text{sen}\,(60^0+x) + \text{sen}\,(60^0-x) - \text{sen}\,(20^0+x) - \text{sen}\,(20^0-x) = 2\cos x\,(\text{sen}\,60^0 - \text{sen}\,20^0);$$

ma sen $60^0 - \text{sen}\,20^0 = \frac{1}{2}$, $\cos x = \text{sen}\,(100^0 - x)$, avremo dunque

$$\text{sen}\,(60^0+x) + \text{sen}\,(60^0-x) - \text{sen}\,(20+x) - \text{sen}\,(20^0-x) = \text{sen}\,(100^0-x).$$

Da queste formole si deducono quelle più sopra stabilite intorno alla divisione impari, ponendo $x=10^0$; ed in generale possono esse servire alla verifica delle tavole dei seni.

XXIV. Se nelle formole prima e terza dell'articolo XIX, si faccia $b=2a$, si avrà

$$\text{sen}\,3a = \frac{\text{sen}\,2a\cos a + \cos 2a\,\text{sen}\,a}{R},\ \cos 3a = \frac{\cos 2a\cos a - \text{sen}\,2a\,\text{sen}\,a}{R};$$

e sostituendo in queste in luogo di sen $2a$ e cos $2a$ i loro valori, trovati nell'articolo XX, e riducendo i risultamenti, mediante la relazione $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = R^2$, verrà

$$\text{sen}\,3a = 3\,\text{sen}\,a - 4\frac{\text{sen}^3 a}{R^2},$$

$$\cos 3a = 4\frac{\cos^3 a}{R^2} - 3\cos a.$$

Queste formole che servono alla triplicazione degli archi, possono servire ancora nell'operar la trisezione, ovvero la divisione dei medesimi archi in tre parti eguali. In fatti se si fa sen $3a=c$, e sen$a=x$, si avrà per determinare x l'equazione

$$c\,R^2 = 3R^2\,x - 4x^3.$$

Donde si vede che la trisezione dell'angolo, considerata analiticamente, è del terzo grado.

Se nelle stesse formole dell'articolo XIX si fa successivamente $b=3a$, $b=4a$, ec., si avranno i seni ed i coseni degli archi $4\,a$, $5\,a$, ec.; vale a dire, in generale, i seni e i coseni dei multipli di a. Reciprocamente le formole che servono alla moltiplicazione degli archi daranno le equazioni necessarie per dividere un arco dato in parti eguali; per determinare, cioè, sen a e cos a, quando si conoscano sen $n\,a$, cos $n\,a$.

XXV. Sviluppiamo ancora i valori di sen $5\,a$, e cos $5\,a$, e perciò riprendiamo le formole.

$$\text{sen}\,(3\,a+2a)=\frac{\text{sen}\,3\,a\cos 2\,a+\cos 3\,a\,\text{sen}\,2\,a}{R},$$

$$\cos\,(3\,a+2a)=\frac{\cos 3\,a\cos 2\,a-\text{sen}\,3\,a\,\text{sen}\,2a}{R};$$

nelle quali sostituiti a sen $2\,a$, cos $2\,a$, sen $3\,a$, cos $3\,a$, i loro valori già trovati (XX, XXIV) troveremo, dietro le opportune riduzioni,

$$\text{sen}\,5\,a=5\,\text{sen}\,a-20\frac{\text{sen}^3\,a}{R^2}+16\frac{\text{sen}^5\,a}{R^4},$$

$$\text{sen}\,5\,a=5\cos a-20\frac{\cos^3 a}{R^2}+16\frac{\cos^5 a}{R^4},$$

Donde si vede che il problema della quintisezione dell'arco o dell'angolo sarebbe del quinto grado, e così per le altre divisioni per i numeri primi 7, 11, 13, ec. gradi.

XXVI. Sia proposto, per esempio di trovare il valore di sen 1°, approssimato sino a 15 decimali, il che può esser utile per la costruzione delle tavole dei seni. L'espressione di sen 10°, trovata nel n.° XXII, essendo ridotta in decimali, nella ipotesi di $R=1$, dà sen $10^{\circ}=0{,}15643\ 44650\ 40231$; e da questo valore si deduce, per la formola del n.° XXI, sen $5^{\circ}=0{,}07845\ 90957\ 27845$.

Sia ora sen $1^{\circ}=x$, bisognerà, per avere x, risolvere l'equazione

$$16\,x^5-20\,x^3+5\,x=0{,}07845\ 90957\ 27845.$$

Se, per abbreviare, si fa il secondo membro uguale a c, si avrà, presso a poco,

$$5\,x-20\,x^3=c\ (^*),\ \text{e}\ x=\tfrac{1}{5}\,c+4\left(\tfrac{1}{5}\,c\right)^3.$$

Or $\frac{1}{5}\,c=0,\ 01569\ 18191$,

e $$4\left(\tfrac{1}{5}\,c\right)^3=0{,}00001\ 5456;$$

dunque si ha per una prima approssimazione $x=0{,}01570\ 7275$, valore questo che non è in errore se non nell' ottava cifra decimale. Per avere un' approssimazione più esatta, facciasi $x=0{,}0157073+y$, e si sostituisca questo valore nell' equazione proposta, e disprezzando i quadrati e le altre potenze superiori di y, si avrà

$$0{,}07845\ 90094\ 24927+4{,}98520\ 17\ y=0{,}07845\ 90957\ 27845;$$

donde si deduce

$$y=0{,}00000\ 00173\ 118207,$$

e quindi

$$x\ \text{ovvero sen}\ 1^{\circ}=0{,}01570\ 73173\ 118207.$$

Dal seno 1°, ovvero di $100'$, si dedurrà similmente il seno di $50'$, di $10'$, di $5'$, ed in fine quello di $1'$.

XXVII. Le formole dell'articolo XIX forniscono un gran numero di conseguenze, tra le quali basterà qui riportare quelle che sono di un uso più frequente. Le prime che si deducono sono le quattro seguenti:

$$\text{sen}\,a\cos b=\tfrac{1}{2}R\,\text{sen}\,(a+b)+\tfrac{1}{2}\,R\,\text{sen}\,(a-b),$$
$$\text{sen}\,b\cos a=\tfrac{1}{2}R\,\text{sen}\,(a+b)-\tfrac{1}{2}\,R\,\text{sen}\,(a-b),$$
$$\cos a\cos b=\tfrac{1}{2}R\cos(a-b)+\tfrac{1}{2}\,R\cos(a+b),$$
$$\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b=\tfrac{1}{2}R\cos(a-b)-\tfrac{1}{2}\,R\cos(a+b),$$

le quali servono a cambiare un prodotto di più seni o coseni, in seni e coseni *lineari*, o moltiplicati soltanto per costanti.

(*) Osservando che essendo x una frazione molto piccola, la quinta potenza x^5 è una quantità molto più piccola rispetto alle potenze inferiori, e perciò a fronte a queste può disprezzarsi.

XXVIII. Se in queste formole si fa $a+b=p$, $a-b=q$, il che dà $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$, si dedurranno le altre quattro

$$\text{sen}\, p+\text{sen}\, q=\frac{2}{R}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)\,,$$

$$\text{sen}\, p-\text{sen}\, q=\frac{2}{R}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\,,$$

$$\cos p+\cos q=\frac{2}{R}\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)\,,$$

$$\cos q-\cos p=\frac{2}{R}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(p-q)\,;$$

le quali s'impiegano sovente ne'calcoli trigonometrici per ridurre due termini ad un solo.

XXIX. In fine, da queste ultime formole, si deducono ancora, per mezzo della divisione, e tenendo presente che

$$\frac{\text{sen}\, a}{\cos a}=\frac{\text{tang}\, a}{R}=\frac{R}{\cot a}\,,$$

le seguenti:

$$\frac{\text{sen}\, p+\text{sen}\, q}{\text{sen}\, p-\text{sen}\, q}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)}{\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(p-q)}=\frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{tang}\tfrac{1}{2}(p-q)}\,,$$

$$\frac{\text{sen}\, p+\text{sen}\, q}{\cos p+\cos q}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)}{\cos\tfrac{1}{2}(p+q)}=\frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(p+q)}{R}\,,$$

$$\frac{\text{sen}\, p+\text{sen}\, q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cot\tfrac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\frac{\text{sen}\, p-\text{sen}\, q}{\cos p+\cos q}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)}{\cos\tfrac{1}{2}(p-q)}=\frac{\text{tang}\tfrac{1}{2}(p-q)}{R}\,,$$

$$\frac{\text{sen}\, p-\text{sen}\, q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)}=\frac{\cot\tfrac{1}{2}(p+q)}{R}\,,$$

$$\frac{\cos p+\cos q}{\cos q-\cos p}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cot\tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{tang}\tfrac{1}{2}(p-q)}\,,$$

$$\frac{\text{sen}\,(p+q)}{\text{sen}\, p+\text{sen}\, q}=\frac{2\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)}{2\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p-q)}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(p+q)}{\cos\tfrac{1}{2}(p-q)}\,,$$

$$\frac{\text{sen}\,(p+q)}{\text{sen}\, p-\text{sen}\, q}=\frac{2\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)}{2\text{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)\cos\tfrac{1}{2}(p+q)}=\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(p-q)}\,,$$

Ciascuna di queste formole contiene l'enunciato di un teorema. Quello contenuto nella prima può tradursi in linguaggio ordinario così; *la somma dei seni di due archi sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma dei medesimi archi sta alla tangente della loro semidifferenza.*

XXX. Se si fa $b=a$ oppure $q=o$ nelle formole dei tre precedenti articoli, si avranno i seguenti risultamenti

$$\cos^2 a = \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R \cos 2a,$$

$$\operatorname{sen}^2 a = \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R \cos 2a,$$

$$R + \cos p = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} p}{R},$$

$$R - \cos p = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} p}{R},$$

$$\operatorname{sen} p = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} p \cos \frac{1}{2} p}{R},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p}{R + \cos p} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} p}{R} = \frac{R}{\cot \frac{1}{2} p},$$

$$\frac{\operatorname{sen} p}{R - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2} p}{R} = \frac{R}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} p},$$

$$\frac{R + \cos p}{R - \cos p} = \frac{\cot^2 \frac{1}{2} p}{R^2} = \frac{R^2}{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} p}.$$

XXXI. Per isviluppare qualche formola relativa alle tangenti consideriamo l'espressione

$$\operatorname{tang}(a+b) = R \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)},$$

e sostituiamo in essa in luogo di sen $(a+b)$ e cos $(a+b)$ i loro sviluppi; avremo

$$\operatorname{tang}(a+b) = R \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

e dividendo per cos a cos b ambi i termini della frazione del secondo membro risulterà

$$\text{tang}(a+b) = R\,\frac{\dfrac{\text{sen }a}{\cos a}+\dfrac{\text{sen }b}{\cos b}}{1-\dfrac{\text{sen }a}{\cos a}\,\dfrac{\text{sen }b}{\cos b}}.$$

Or $\dfrac{\text{sen }a}{\cos a}=\dfrac{\text{tang }a}{R}$, e $\dfrac{\text{sen }b}{\cos b}=\dfrac{\text{tang }b}{R}$, dunque si avrà

$$\text{tang}(a+b)=\frac{\dfrac{\text{tang }a}{R}+\dfrac{\text{tang }b}{R}}{1-\dfrac{\text{tang }a\text{ tang }b}{R^2}},$$

e riducendo avremo in fine

$$\text{tang}(a+b)=\frac{R^2(\text{tang }a+\text{tang }b)}{R^2-\text{tang }a\text{ tang }b},$$

Questa è la formola che dà la tangente della somma di due archi, espressa per mezzo delle tangenti di ciascuno di essi. Si troverà similmente per la tangente della loro differenza

$$\text{tang}(a-b)=\frac{R^2(\text{tang }a-\text{tang }b)}{R^2+\text{tang }a\text{ tang }b}.$$

Fatto $a=b$ nella prima di queste due formole, si avrà per la duplicazione degli archi l'altra formola

$$\text{tang }2a=\frac{2R^2\text{ tang }a}{R^2-\text{tang}^2 a},$$

dalla quale poi deducesi l'altra

$$\cot 2a=\frac{R^2}{\text{tang }2a}=\frac{R^2}{2\text{ tang }a}-\tfrac{1}{2}\text{tang }a=\tfrac{1}{2}\cot a-\tfrac{1}{2}\text{tang }a.$$

Fatto similmente $b=2a$, avrassi per la triplicazione degli archi la formola

$$\text{tang }3a=\frac{R^2(\text{tang }a+\text{tang }2a)}{R^2-\text{tang }a\text{ tang }2a};$$

la quale colla sostituzione dei precedenti valori di tang a e tang $2a$, diviene, dietro le riduzioni

$$\text{tang }3a=\frac{3R^2\text{ tang }a-\text{tang}^3 a}{R^2-3\text{ tang}^2 a}.$$

XXXII. Lo sviluppo delle formole trigonometriche, considerato in tutta la sua generalità, forma un ramo importante dell'analisi, intorno al quale si può consultare l'eccellente opera di Euler, che ha per titolo, *Introductio in analisyn infinitorum*, o anche la traduzione di quest' opera, fatta da Labey. Crediamo intanto dover dimostrare ancora le formole che servono ad esprimere il seno ed il coseno in funzione dell'arco, formole che, nella nota V della nostra geometria, si è supposto conoscere, e che d'altronde son necessarie per la costruzione delle tavole.

E dapprima supponendo il raggio $= 1$, il che non altera punto la generalità dei risultamenti, si ha la formola

$$\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1,$$

il cui primo membro può esser considerato come il prodotto di due fattori immaginarii

$$\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A,\ \cos A - \sqrt{-1}\operatorname{sen} A,$$

per modo che si abbia

$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A),\ (\cos A - \sqrt{-1}\operatorname{sen} A) = 1.$$

Moltiplicando inoltre i due fattori simili

$$\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A,\ \ \cos B + \sqrt{-1}\operatorname{sen} B,$$

si troverà

$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)\ (\cos B + \sqrt{-1}\operatorname{sen} B)$$
$$= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B + (\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A)\sqrt{-1},$$

e come

$$\cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A+B),$$
$$\cos A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A = \operatorname{sen}(A+B),$$

verrà

$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)(\cos B + \sqrt{-1}\operatorname{sen} B) = \cos(A+B) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(A+B);$$

qual risultamento c'insegna, che la moltiplicazione di due espressioni simili della forma $\cos x + \sqrt{-1}\operatorname{sen} x$, si effettuisce addizionando solamente gli archi tra loro; proprietà questa che è analoga a quella dei logaritmi. Da quest'ultima formola si deduce successivamente

$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)\ (\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A) = \cos 2A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} 2A,$$
$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)\ (\cos 2A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} 2A) = \cos 3A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} 3A,$$
$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)\ (\cos 3A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} 3A) = \cos 4A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} 4A.$$
ec.

Il primo di questi prodotti è uguale a $(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^2$; il secondo è uguale a $(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^3$; e così di seguito. Dunque, dinotando, in generale con n un numero intero si avrà

$$(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^n = \cos nA + \sqrt{-1}\operatorname{sen} nA;$$

e, cambiando il segno di $\sqrt{-1}$, avremo pure

$$(\cos A - \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^n = \cos nA - \sqrt{1}\operatorname{sen} nA.$$

Da queste due equazioni, che son conseguenza l'una dell'altra, si possono ricavare separatamente i valori di $\cos nA$, $\operatorname{sen} nA$. In effetti, una volta addizionando, ed un'altra volta sottraendo le dette equazioni, emergono le altre due

$$\cos nA = \tfrac{1}{2}(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^0 + \tfrac{1}{2}(\cos A - \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^n,$$

$$\operatorname{sen} nA = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A + \sqrt{-}\operatorname{sen} A)^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\cos A - \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^n.$$

XXXIII. Volendosi esprimere in serie le stesse quantità $\cos nA$, $\operatorname{sen} nA$, converrà sviluppare l'espressione $(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^n$, mediante la formola del binomio di Newton; il che darà, tenendo presente la relazione, $(\cos A + \sqrt{-1}\operatorname{sen} A)^n = \cos nA + \sqrt{-1}\operatorname{sen} nA$,

$$\cos nA + \sqrt{-1}\operatorname{sen} nA = \cos^n A + \frac{n}{1}\cos^{n-1} A \operatorname{sen} A\sqrt{-1} - \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\cos^{n-2} A \operatorname{sen}^2 A$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\cos^{n-3} A \operatorname{sen}^3 A\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\cos^{n-4} A \operatorname{sen}^4 A + \text{ec}.$$

Or questa equazione dovendo aver luogo qualunque sia A, è necessario che la parte reale del primo membro sia eguale a quella del secondo, e così ancora la parte immaginaria eguale alla immaginaria; il che conduce alle due formole richieste

$$\cos nA = \cos^n A$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} \cos^{n-2} A \operatorname{sen}^2 A + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \cos^{n-4} A \operatorname{sen}^4 A - \text{ec.};$$

$$\operatorname{sen} nA = n \cos^{n-1} A \operatorname{sen} A - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \cos^{n-3} A \operatorname{sen}^3 A + \text{ec.}$$

Queste serie di una legge facile a scorgersi, daranno il seno ed il coseno d'un arco multiplo di A, in un modo molto più spedito di quel che sarebbe, facendo uso delle operazioni indicate nell'articolo XXIV.

XXXIV. Osservando che $\operatorname{sen} A = \cos A \operatorname{tang} A$, le precedenti serie potran mettersi sotto le forme seguenti

$$\cos nA = \cos^n A \left(1 - \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} \operatorname{tang}^2 A + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \operatorname{tang}^4 A - \text{ec.}\right),$$

$$\operatorname{sen} nA = \cos^n A \left(\frac{n}{1} \operatorname{tang} A - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} \operatorname{tang}^3 A + \text{ec.}\right),$$

Sia ora $n = \frac{x}{A}$, e si avrà, sostituendo questo valore e conservando sempre il fattore $\cos^n A$,

$$\cos x = \cos^n A \left(1 - \frac{x(x-A)}{1 \, . \, 2} \frac{\operatorname{tang}^2 A}{A^2}\right.$$
$$\left. + \frac{x(x-A)(x-2A)(x-3A)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \frac{\operatorname{tang}^4 A}{A^4} - \text{ec.}\right).$$

$$\operatorname{sen} x = \cos^n A \left(\frac{x}{1} . \frac{\operatorname{tang} A}{A} - \frac{x(x-A)(x-2A)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} . \frac{\operatorname{tang}^3 A}{A^3} + \text{ec.}\right.$$

In queste formole potendo prendersi A a piacere, noi lo supporremo piccolissimo: allora $\frac{\operatorname{tang} A}{A}$ sarà una quantità differente pochissimo dall'unità, poichè la tangente d'un arco piccolissimo è pressochè uguale all'arco. Intanto, finchè l'arco non è nullo, si ha $\operatorname{tang} A > A$ (1), ovvero $\frac{\operatorname{tang} A}{A} > 1$; ma si ha nel tempo stesso $A > \operatorname{sen} A$ (2); dunque $\frac{\operatorname{tang} A}{A} < \frac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{sen} A}$, ossia $\frac{\operatorname{tang} A}{A} < \frac{1}{\cos A}$. Da ciò si vede che il rapporto $\frac{\operatorname{tang} A}{A}$ è sempre compreso tra i limiti 1 ed $\frac{1}{\cos A}$. Sia ora $A = o$, e sarà $\cos A = 1$; dunque, essendo $\frac{\operatorname{tang} A}{A}$ compreso tra 1 ed $\frac{1}{\cos A}$, bisognerà che si abbia esattamente $\frac{\operatorname{tang} A}{A} = 1$ quando $A = 0$. Facendo dunque $A = 0$, si avrà

(1) In effetti AT (*fig.* 1) è maggiore di AM, poichè il triangolo ATC sta al settore ACM :: AT $\times \frac{1}{2}$ AC : AC $\times \frac{1}{2}$ AM :: AT : AM.

(2) AM è maggiore di MP, perchè l'arco MAN è maggiore della sua corda MN.

$$\cos x = \cos^n A \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{ec.}\right),$$

$$\text{sen}\, x = \cos^2 A \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ec.}\right).$$

Resta a vedere quel che diviene $\cos^n A$, quando A diminuisce di più in più, e diviene finalmente zero. Perciò si osserverà che $\frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A = 1 + \text{tang}^2 A$; dunque $\cos A = (1 + \text{tang}^2 A) - \frac{1}{2}$, e quindi

$$\cos^n A = (1 + \text{tang}^2 A) - \frac{n}{2} = 1 - \frac{n}{2} \text{tang}^2 A + \frac{n\,(n+2)}{2 \cdot 4} \text{tang}^4 A - \text{ec.}$$

Sostituendo in luogo di n il suo valore $\frac{x}{A}$, si avrà

$$\cos^n A = 1 - \frac{x}{2} A^2 \cdot \frac{\text{tang}^2 A}{A^2} + \frac{x\,(x+2A)}{2 \cdot 4} A^2 \cdot \frac{\text{tang}^4 A}{A^4} - \text{ec.}$$

Se ora s'immagini che A diminuisca di più in più, restando però x lo stesso, il valore di $\cos^n A$ s'approssimerà sempreppiu all'unità; in fine se si fa

$$A = o, \text{ e perciò } \frac{\text{tang } A}{A} = 1,$$

si avrà esattamente $\cos^n A = 1$. Dunque sarà finalmente

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{ec.},$$

$$\text{sen}\, x = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{ec.}$$

e con queste formole si potrà calcolare il seno ed il coseno d'un arco, la cui lunghezza è data in parti del raggio preso per unità.

XXXV. Questi stessi valori possono rappresentarsi in modo compendioso, per mezzo degli esponenziali. Conviene perciò ricordarsi, che, dinotando con e la base del sistema dei logaritmi iperbolici, si ha

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ec.}$$

Facendo in questa formola $z = x\sqrt{-1}$, ne risulterà

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{ec.}$$

Parimenti si avrà

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{ec.}$$

e quindi una volta addizionando, ed un'altra volta sottraendo, otterremo le due serie

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{ec.}$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \text{ec.}$$

i cui secondi membri sono precisamente i valori trovati per cos x e per sen x. Dunque si avrà

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\,,\quad \text{sen}\ x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

donde deducesi l' altra formola

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}\,\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \sqrt{-1}\ \text{tang}\ x,$$

della quale si è fatto uso nella nota IV.

Le stesse formole danno ancora

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x,\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x;$$

dunque dividendo l'una per l'altra si avrà,

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x}{\cos x - \sqrt{-1}\ \text{sen}\ x} = \frac{1 + \sqrt{-1}\ \text{tang}\ x}{1 - \sqrt{-1}\ \text{tang}\ x},$$

e prendendo i logaritmi d'ambi i membri, verrà

$$2x\sqrt{-1} = \log\left(\frac{1 + \sqrt{-1}\ \text{tang}\ x}{1 - \sqrt{-1}\ \text{tang}\ x}\right)$$

Ma si sa che $\log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5$ ec.; ponendo dunque $\sqrt{-1}$ tang x in luogo di z, e dividendo da ambe le parti per $2\sqrt{-1}$, risulterà in fine

$$x = \text{tang}\ x - \tfrac{1}{3}\ \text{tang}^3 x + \tfrac{1}{5}\ \text{tang}^5\ x - \tfrac{1}{7}\ \text{tang}^7\ x + \text{ec.}$$

Questa formola semplicissima serve a calcolare l' arco per mezzo della sua tangente, quando essa è più piccola del raggio.

XXXVI. Per applicar le formole precedenti alla determinazione del seno e del coseno d'un arco dato in gradi e parti di grado, bisogna aver la lunghezza di quest'arco espressa in parti del raggio, o, ciò che vale lo stesso, bisogna avere il rapporto di quest'arco al raggio. Or, essendo 1 il raggio, la semicirconferenza, ovvero l' arco di $200^0 = 2,\ 14159\ 26535\ 897932$. Esprimasi con π questo numero, e la lunghezza dell'arco $\frac{m}{n}\ 100^0$ sarà $\frac{m}{n}\,\frac{\pi}{2}$; dunque se nelle formole precedenti si fa $x = \frac{m}{n}\,,\ \frac{\pi}{2}$, si rimetta in seguito per π il suo valore, e si calcolino i coefficienti sino a sedici decimali, si avranno le formole seguenti:

$$\text{sen}\left(\frac{m}{n}100^0\right) =$$

$$1,\ 57079\ 63267\ 948966\frac{m}{n}$$
$$-\ 0,\ 64596\ 40975\ 062463\frac{m^3}{n^3}$$
$$+\ 0,\ 07969\ 26262\ 461670\frac{m^5}{n^5}$$
$$-\ 0,\ 00468\ 17541\ 353187\frac{m^7}{n^7}$$
$$+\ 0,\ 00016\ 04411\ 847874\frac{m^9}{n^9}$$
$$-\ 0,\ 00000\ 35988\ 432352\frac{m^{11}}{n^{11}}$$
$$+\ 0,\ 00000\ 00569\ 217292\frac{m^{13}}{n^{13}}$$
$$-\ 0,\ 00000\ 00006\ 688035\frac{m^{15}}{n^{15}}$$
$$+\ 0,\ 00000\ 00000\ 060669\frac{m^{17}}{n^{17}}$$
$$-\ 0,\ 00000\ 00000\ 000438\frac{m^{19}}{n^{19}}$$
$$+\ 0,\ 00000\ 00000\ 000003\frac{m^{21}}{n^{21}}$$

$$\cos\left(\frac{m}{n}100^0\right) =$$

$$1\ \ 00000\ 00000\ 000000$$
$$-\ 1,\ 23370\ 05501\ 361698\frac{m^2}{n^2}$$
$$+\ 0,\ 25366\ 95079\ 010480\frac{m^4}{n^4}$$
$$-\ 0,\ 02086\ 34807\ 633530\frac{m^6}{n^6}$$
$$+\ 0,\ 00091\ 92602\ 748394\frac{m^8}{n^8}$$
$$-\ 0,\ 00002\ 52020\ 423731\frac{m^{10}}{n^{10}}$$
$$+\ 0,\ 00000\ 04710\ 874779\frac{m^{12}}{n^{12}}$$
$$-\ 0,\ 00000\ 00063\ 866031\frac{m^{14}}{n^{14}}$$
$$+\ 0,\ 00000\ 00000\ 656596\frac{m^{16}}{n^{16}}$$
$$-\ 0,\ 00000\ 00000\ 005294\frac{m^{18}}{n^{18}}$$
$$+\ 0,\ 00000\ 00000\ 000034\frac{m^{20}}{n^{20}}$$

I seni e coseni degli archi a partire da zero sino a 50^0 comprendono i seni e coseni degli archi da 50^0 sino a 100^0, perchè si ha sen $(50^0 + z) = \cos(50^0 - z)$, $\cos(50^0 + z) =$ sen $(50^0 - z)$. Dunque nelle formole che danno i valori di sen $\frac{m}{n}$ 100^0 e cos $\frac{m}{n}$ 100^0, si potrà sempre supporre $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$; di tal che le serie saranno talmente convergenti, che sarà sufficiente calcolare un piccol numero dei primi termini, soprattutto quando non si abbia bisogno di molti decimali.

Se si fa successivamente $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$, si troveranno i risultamenti seguenti:

sen $10^0 = \cos 90^0 = 0,\ 15643\ 44650\ 40231$,
sen $20^0 = \cos 80^0 = 0,\ 30901\ 69943\ 74947$,
sen $30^0 = \cos 70^0 = 0,\ 45399\ 04997\ 39547$,
sen $40^0 = \cos 60^0 = 0,\ 58778\ 52522\ 92473$,
sen $50^0 = \cos 50^0 = 0,\ 70710\ 67811\ 86548$,
sen $60^0 = \cos 40^0 = 0,\ 80901\ 69943\ 74947$,
sen $70^0 = \cos 30^0 = 0,\ 89100\ 65241\ 88368$,
sen $80^0 = \cos 20^0 = 0,\ 95105\ 65162\ 95154$,
sen $90^0 = \cos 10^0 = 0,\ 98768\ 83405\ 95138$,
sen $100^0 = \cos 0^0 = 1,\ 00000\ 00000\ 00000$,

i quali si accordano colle formole algebriche del n.° 22. Si troverà similmente, facendo $\frac{m}{n} = \frac{1}{100}$, pel valore di sen 1^0 quello stesso che si è trovato nel n° 26; e

la grande facilità con cui si perviene a questi risultamenti, è una pruova dell' eccellenza del metodo.

Sulla costruzione delle tavole dei seni.

XXXVII. I dotti a cui si deve la costrnzione delle prime tavole dei seni, fondarono i loro calcoli sopra metodi ingegnosi, ma di un' applicazione soverchiamente penosa. L'analisi in seguito à fornito dei metodi molto più spediti per raggiungere il medesimo scopo; ma siccome i calcoli eran già fatti, così questi metodi sarebbero rimasti senza applicazione, se lo stabilimento del nuovo sistema metrico non avesse fornita l'occasione di calcolar nuove tavole, conforme alla divisione decimale.

A dare un'idea de'metodi che si posson seguire nella costruzione delle tavole, supponiamo che si trattasse di calcolare i seni di tutti gli archi di minuto in minuto, da 1 minuto sino a 10000 minuti ovvero 100 gradi. Faremo il raggio $= 1$, l'arco d' un minuto $= a$, e bisognerà dapprima trovare il seno ed il coseno dell' arco a con un grado molto grande di approssimazione.

Si sa che, essendo 1 il raggio la semicirconferenza ossia l'arco di

$$200^o = 3,\ 14159\ 26535\ 897932;$$

dividendo questo numero per 20000, si ha l'arco di 1 cioè

$$a = 0,\ 00015\ 70796\ 32679\ 48966,$$

valore esatto sino alla ventesima cifra decimale. Or quando un arco è piccolissimo, il suo seno gli è sensibilmente uguale, perciò si ha, molto prossimamente,

$$\text{sen } a = 0,\ 00015\ 70796\ 32679\ 48966.$$

Questo valore però è in errore alla tredicesima cifra decimale, che è la decima cifra significativa. Per avere un valore più esatto, il mezzo più semplice è quello di ricorrere alle formole dell' art. 36, dalle quali, se si fa $\frac{m}{n} = \frac{1}{10000}$, si avrà immediatamente, e tenendo conto di soli due o tre de' primi termini di ciascuna serie,

$$\text{sen } a = 0,\ 00015\ 70796\ 32033\ 525363$$
$$\cos a = 0,\ 99999\ 99876\ 62994\ 52400\ 5253;$$

valori esatti, il primo sino alla ventesima cifra decimale, e sino alla ventiquattresima il secondo.

XXXVIII. Conoscendo il seno ed il coseno dell'arco di un minuto, dinotato da a, per dedurre successivamente i seni di tutti gli archi moltiplici di a, si farà, giusta la formola dell'articolo 22, $p = x + a$, $q = x - a$. La prima e la terza, dietro queste sostituzioni, e supponendo sempre il raggio $R = 1$, daranno

$$\text{sen } (x + a) = 2 \cos a \text{ sen } x - \text{sen } (x - a),$$
$$\cos (x + a) = 2 \cos a \cos x - \cos (x - a).$$

Da queste formole risulta, che, se si ha una serie di archi in progressione aritmetica, la cui differenza sia a, i loro seni formeranno una serie ricorrente, la cui *scala di relazione* è $2 \cos a - 1$, vale a dire che, essendo calcolati due seni consecutivi A e B, si troverà il seguente C, moltiplicando B, per $2 \cos a$, ed A per -1, ed infine addizionando i due prodotti, il che dà $C = 2B \cos a - A$. I coseni de' medesimi archi formeranno del pari una serie ricorrente, la cui scala di relazione è $2 \cos a, -1$: si avrà dunque successivamente

$\text{sen } 0 = 0$	$\cos 0 = 1$
$\text{sen } a = \text{sen } a$	$\cos a = \cos a$
$\text{sen } 2a = 2 \cos a \text{ sen } a$	$\cos 2a = 2 \cos a \cos a - 1$
$\text{sen } 3a = 2 \cos a \text{ sen } 2a - \text{sen } a$	$\cos 3a = 2 \cos a \cos 2a - \cos a$
$\text{sen } 4a = 2 \cos a \text{ sen } 3a - \text{sen } 2a$	$\cos 4a = 2 \cos a \cos 3a - \cos 2a$
$\text{sen } 5a = 2 \cos a \text{ sen } 4a - \text{sen } 3a.$	$\cos 5a = 2 \cos a \cos 4a - \cos 3a$
ec.	ec.

XXXIX. Or altro non resta che eseguire le operazioni indicate, sostituendo i valori di sen a e cos a. Se si voglian costruire delle tavole di seni con dieci cifre decimali, sarà sufficiente prendere i valori di sen a e cos a approssimativamente sino alla sedicesima cifra decimale, e si avrà

$$\text{sen } a = 0,\ 00015\ 70796\ 320335,$$
$$\cos a = 0,\ 99999\ 99876\ 629945;$$

ma siccome cos a differisce pochissimo dall'unità, v'ha un mezzo abbreviativo del quale bisogna profittarne. Sia $k = 2\ (1 - \cos a) = 0,\ 00000\ 00246\ 740110$, si avrà $2 \cos a = 2 - k$; il che darà

$$\text{sen } (x + a) - \text{sen } x = \text{sen } x - \text{sen } (x - a) - k \text{ sen } x,$$
$$\cos (x + a) - \cos x = \cos x - \cos (x - a) - k \cos x.$$

Per avere il termine sen $(x + a)$ basta aggiungere al termine precedente sen x la differenza sen $(x + a) -$ sen x, la quale sarà sempre piccolissima: or questa differenza, giusta la formola, è uguale ad una differenza simile, già calcolata, che è sen $x -$ sen $(x - a)$, meno il prodotto di sen x pel numero costante k. Questa moltiplicazione adunque è la sola operazione, un poco lunga, che debba farsi per dedurre il valore di un seno da quello di due seni precedenti; ma conviene osservare, 1° che non si ha bisogno conoscere il prodotto se non che sino alla sedicesima cifra decimale, il che importa calcolare pochissime cifre; 2° che queste moltiplicazioni possono essere abbreviate molto, formando anticipatamente i prodotti del numero costante 246740110 per 1, 2, 3, sino a 9; perchè con questo mezzo, si avranno immediatamente i prodotti parziali che risultano dalle differenti cifre del moltiplicatore sen x, e non resterà altro che fare l'addizione di questi prodotti, limitandosi sempre a sedici decimali.

Gli stessi procedimenti debbono tenersi nel calcolo de'coseni, e quando si sarà prolungata l'una e l'altra serie sino a 50°, la tavola sarà completata.

XL. Ripetiamo che è necessario calcolare i seni con 16 decimali, vale a dire con cinque o sei decimali di più di quelli che si voglion ritenere realmente, affinchè si fosse sicuri che gli errori, che posson moltiplicarsi nel corso di 5000 operazioni, non influiscano sulla decima cifra decimale de'risultamenti. Fatto il calcolo si toglieranno i decimali superflui, e nella tavola non se ne conserveranno che dieci.

Del resto, quando trattasi eseguir tanti calcoli, deve ocrcarsi di verificare i risultamenti per quanto più sovente è possibile. Nell'esempio da noi riportato per una tavola calcolata da minuto in minuto, sarà necessario calcolare anticipatamente i seni e coseni da grado in grado, e vedere se con questi risultamenti si accordano quelli che si vanno ad ottenere eseguendo i calcoli da minuto a minuto. Or per calcolare i seni e coseni da grado in grado, si hanno le formole ed i valori seguenti:

$$\text{sen } (x + 1^0) - \text{sen } x = \text{sen}' x - \text{sen } (x - 1^0) - h \text{ sen } x$$
$$\cos (x + 1^0) - \cos x = \cos x - \cos (x - 1^0) - h \text{ sen } x$$
$$\text{sen } 1^0 = 0,\ 01570\ 73173\ 11820\ 676$$
$$\cos 1^0 = 0,\ 99987\ 66324\ 81660\ 599$$
$$h = 2 + (1 - \cos 1^0) = 0,\ 00024\ 67350\ 36678\ 802$$

I seni calcolati da grado in grado si verificheranno essi pure da dieci in dieci, per mezzo dei valori di sen 10°, sen 20°, ec., già conosciuti. In fine quando è per intero calcolata la tavola, la si può verificare in quante si vogliano maniere differenti, per mezzo dell'equazione

$$\text{sen } (100^0 - x) + \text{sen } (20^0 - x) + \text{sen } (20^0 - x) = \text{sen } (60^0 - x) + \text{sen } (60^0 + x).$$

XLI. I valori dei seni, risultanti dai calcoli ora indicati, sono espressi in parti del raggio, e sono così chiamati *seni naturali;* però si è riconosciuto che in pratica vi ha molto vantaggio servendosi dei logaritmi dei seni, e non dei seni quali essi sono, ed e perciò che la maggior parte delle tavole non contengono i seni naturali, ma soltanto i loro logaritmi. Si concepisce benissimo che, dopo aver calcolati i seni, è stato facile trovarne i logaritmi; ma come la supposizione del raggio = 1 rendeva negativi i logaritmi dei seni (*), così si è preferito prendere il raggio = 10000000000, vale a dire

(*) In fatti i seni ed i coseni degli archi, d'una grandezza qualunque, e non multipli del quadrante, sono sempre minori del raggio; così nell'ipotesi che questo fosse = 1, quelli saranno delle frazioni, e perciò i loro logaritmi saranno negativi.

che si son moltiplicati per 10000000000 tutti i seni trovati nella supposizione del raggio $= 1$. Con tal mezzo, il raggio, ovvero il seno di 100^{o} che s'incontra spesso nelle tavole, à per logaritmo 10 unità; e perchè vi fossero nella tavola dei logaritmi negativi, dovrebbero questi appartenere a seni di angoli più piccoli di quelli che s' incontrano in pratica.

Trovati i logaritmi dei seni e coseni, egli è facile dedurre quelle delle tangenti per mezzo di semplici sottrazioni; in effetti, essendo tang $x = \frac{R \text{ sen } x}{\cos x}$, ne segue, che log tang $x = 10 + \log \text{sen } x - \log \cos x$. Similmente per le secanti si ha la relazione sec $x = \frac{R^2}{\cos x}$, alla quale applicando i logaritmi, si avrà la formola per dedurre i logaritmi delle secanti, mediante quelli dei soli coseni. E perchè si facilmente si deducono i logaritmi delle secanti, così non s'inseriscono nelle tavole che i logaritmi dei soli seni e quelli delle tangenti.

Resterebbe da ultimo, spiegare l' interpolazione di cui si fa uso, sia per trovare i logaritmi dei seni e delle tangenti degli archi, che contengono delle frazioni di minuto, sia per trovar l'arco corrispondente a un dato logaritmo di seno o di tangente, quando questo logaritmo cade tra due logaritmi delle tavole. Ma per tali dettagli sarà meglio consultare le spiegazioni che accompagnano sempre le tavole.

Principii per la risoluzione dei triangoli rettilinei.

XLII. *In ogni triangolo rettangolo, il raggio, sta al seno di uno degli angoli acuti, come l' ipotenusa sta al cateto opposto a quest' angolo.*

Sia ABC (*fig.* 3) il triangolo proposto, rettangolo in A; dal punto C, come centro, e col raggio CD, eguale al raggio delle tavole, si descriva l' arco DE, che sarà la misura dell' angolo C; si abbassi su CD la perpendicolare EF, che sarà il seno dell' angolo C. I triangoli CBA, CEF sono simili, e danno la proporzione CE : CF::CB : BA; dunque

$$R : \text{sen } C :: \text{BC} : \text{BA}.$$

XLIII. *In ogni triangolo, il raggio sta alla tangente d'uno degli angoli acuti, come il cateto adiacente a quest' angolo sta al cateto opposto.*

Descritto l'arco DE, come nell'articolo precedente, si elevi sopra CD la perpendicolare GD, che sarà la tangente dell' angolo C. Dai triangoli simili CBG, CAB, si avrà la proporzione CD : DG::CA : AB; dunque

$$R : \text{tang } C :: \text{CA} : \text{AB}.$$

XLIV. *In un triangolo rettilineo qualunque, i seni degli angoli stanno tra loro come i lati opposti.*

Sia ABC (*fig.* 4) il triangolo proposto, AB la perpendicolare abbassata dal vertice A sul lato opposto BC. Posto ciò si osserverà che si posson dare due casi.

1.° Se la perpendicolare cade al di dentro del triangolo ABC, allora i triangoli rettangoli ABD, ACD, daranno giusta l'articolo XLII,

$$R : \text{sen} B :: \text{AB} : \text{AD},$$
$$R : \text{sen} C :: \text{AC} : \text{AD}.$$

Or queste due proporzioni hanno eguali i termini estremi, dunque i medi saranno in ragione inversa, e si avrà

$$\text{sen } C : \text{sen } B :: \text{AB} : \text{AC}$$

2.° Se la perpendicolare cade al di fuori del triangolo ABC (*fig.* 5), allora i triangoli rettangoli ABD, ACD, daranno ancora le proporzioni

$$R : \text{sen ABD} :: \text{AB} : \text{AD},$$
$$R : \text{sen } C :: \text{AC} : \text{AD},$$

dalle quali si deduce sen C : sen ABD :: AB : AC. Ma l'angolo ABD è supplemento di ABC, ossia di B; dunque sen ABD = sen B; e perciò si avrà, come nel primo caso,

$$\text{sen } C : \text{sen } B :: \text{AB} : \text{AC}.$$

XLV. *In ogni triangolo rettilineo, il coseno d'un angolo sta al raggio, come la somma de' quadrati de' lati che comprendono quest' angolo, meno il quadrato del terzo lato, sta al doppio rettangolo de' due primi lati; vale a dire che si ha* (*fig.* 4)

$$\cos B : R :: \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{AC}}^2 : 2\,\text{AB} \times \text{BC},$$

ovvero

$$\cos B = R \times \frac{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{AC}}^2}{2\,\text{AB} \times \text{BC}}$$

Dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sul lato BC.

1.° Se questa perpendicolare cade al di dentro del triangolo, si avrà (pr. 12, lib. 3) $\overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - 2\,\text{BC} \times \text{BD}$; dunque $\text{BD} = \frac{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{AC}}^2}{2\,\text{BC}}$. Ma nel triangolo rettangolo ABD, si ha R : sen BAD :: AB : BD; d'altronde, essendo l'angolo BAD complemento di B, si ha sen BAD = cos B; dunque $\cos B = \frac{R \times \text{BD}}{\text{AB}}$, ovvero,

$$\cos B = R \times \frac{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{AC}}^2}{2\,\text{AB} \times \text{BC}}.$$

2.° Se la perpendicolare cade al di fuori del triangolo (*fig.* 5), si avrà (pr. 13, lib. 3) $\overline{\text{AC}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BC}}^2 + 2\,\text{BC} \times \text{BD}$; dunque $\text{BD} = \frac{\overline{\text{AC}}^2 - \overline{\text{AB}}^2 - \overline{\text{BC}}^2}{2\,\text{BC}}$. Ma nel triangolo rettangolo BAD si ha sempre

sen BAD, ovvero $\cos ABD = \frac{R \times BD}{AB}$, ed essendo l' angolo ABD supplemento di ABC ovvero di B, si ha (XI) $\cos B = - \cos ABD = - \frac{R \times BD}{AB}$; dunque sostituendo il valore di BD, si avrà ancora

$$\cos B = R \times \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\ AB \times BC}.$$

XLVI. Sieno A, B, C i tre angoli d' un triangolo qualunque, a, b, c i lati rispettivamente opposti, e si avrà, dietro quest'ultima proposizione

$$\cos B = R \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\ ac}.$$

Lo stesso principio, essendo applicato a ciascuno degli altri due angoli, darà

$$\cos A = R\ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ bc},\ \cos C = R \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ ab}.$$

Queste tre formole bastano esse sole per risolvere tutti i problemi della trigonometria rettilinea; poichè, date tre delle sei quantità A, B, C, a, b, c, le altre tre verran determinate mediante le equazioni precedenti. Quindi i principii già esposti, e tutti quelli che a loro si possono aggiungere, deggiono essere una conseguenza necessaria di queste tre formole principali.

In effetti il valore di $\cos B$ dà

$$\text{sen}^2\ B = R^2 - \cos^2\ B = R^2 \frac{4a^2\ c^2\ -\ (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4\ a^2\ c^2}.$$

ovvero, sviluppando

$$\text{sen}^2\ B = \frac{R^2}{4\ a^2\ c^2}\ (2\ a^2\ b^2 + 2\ a^2\ c^2 + 2\ b^2\ c^2 - a^4 - b^4 - c^4).$$

e quindi

$$\frac{\text{sen}\ B}{b} = \frac{R}{2abc} \sqrt{2\ a^2\ b^2 + 2a^2\ c^2 + 2b^2\ c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Or il secondo membro di quest' equazione, essendo tale una funzione delle lettere a, b, c, che il suo valore è sempre lo stesso, comunque si scambino tra loro queste lettere, così ne segue che cambiando B in A, b in a, oppure B in C, b in c, il secondo membro sarà sempre dello stesso valore, e quindi si potrà conchiudere che

$$\frac{\text{sen}\ A}{a} = \frac{\text{sen}\ B}{b} = \frac{\text{sen}\ C}{c};$$

le quali equazioni costituiscono il principio del n.° XLIV. E da queste si dedurranno facilmente i principi de' n. XLII e XLIII.

XLVII. *In ogni triangolo rettilineo la somma di due lati sta alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi lati sta alla tangente della semidifferenza di questi stessi angoli.*

In effetti dalla proporzione AB : AC :: sen C : sen B (*fig.* 4 e 5) si ricava AC + AB : AC — AB :: sen B + sen C : sen B — sen C. Ma, per la formola dell'art. XXIX, si ha

$\text{sen}\, B + \text{sen}\, C : \text{sen}\, B - \text{sen}\, C :: \text{tang}\frac{B+C}{2} : \text{tang}\frac{B-C}{2}$, dunque sarà pure

$$AC+AB : AC-AB :: \text{tang}\,\frac{B+C}{2} : \text{tang}\frac{B-C}{2};$$

quale proporzione costituisce il principio enunciato.

Con questo piccol numero di principii si è nello stato di risolvere tutti i casi della trigonometria rettilinea.

Risoluzione de' triangoli rettangoli.

XLVIII. Siano A l'angolo retto di un triangolo rettangolo proposto, B e C gli altri due angoli, e sieno a l'ipotenusa, e b, c i cateti, opposti rispettivamente agli angoli B, C. Ricordandosi che i due angoli B e C sono complementi l'uno dell'altro, si ha

$$\text{sen}\, C = \cos B,\ \text{sen}\, B = \cos C,\ \text{tang}\, B = \cot C,\ \text{tang}\, C = \cot B.$$

Posto ciò, i differenti problemi che possono aversi a risolvere intorno ai triangoli rettangoli, si ridurranno sempre ai quattro casi seguenti.

CASO PRIMO.

XLIX. *Data l'ipotenusa* a *e dato un cateto* b *trovare l'altro cateto, e i due angoli acuti* (*).

Per determinare l'angolo B, si partirà dalla proporzione $a : b :: R : \text{sen}\, B$ (XLIII). Conosciuto l'angolo B, si conoscerà anche l'angolo C, perchè questo essendo complemento del primo, si ha $C = 100° - B$. Potrebbesi avere anche direttamente l'angolo C mediante la proporzione $a : b :: R : \cos C$.

Per determinare poi il cateto c, possiamo servirci di due metodi differenti: col primo metodo, dopo aver determinato l'angolo B, si farà la proporzione $R : \cot B :: b : c$ (XLIII), la quale darà il valore di c; e facendo uso del secondo si troverà direttamente c, mediante l'equazione $c^2 + b^2 = a^2$, che dà

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$

e quindi per la teorica de' logaritmi sarà

$$\log c = \tfrac{1}{2} \left\{ \log(a \times b) + \tfrac{1}{2} \log(a-b), \right.$$

(*) Si osservi che in tutti i problemi relativi alla risoluzione dei triangoli rettangoli, basta darne due delle sei parti che li costituiscono, purchè però tra queste due parti non vi sia l'angolo retto; poichè l'altra è data di per se stessa, ed è appunto l'angolo retto, che è una quantità di valor costante. Così si hanno, sempre, date tre parti del triangolo, e si tratta determinare le altre, come proponesi la trigonometria.

CASO SECONDO.

L. *Dati i due cateti* b *e* c, *trovare l'ipotenusa* a *e gli angoli acuti* B *e* C.

Si avrà in primo luogo l'angolo B per mezzo della proporzione $c : b :: R : \tan B$ (XLIII). Quindi si otterrà C, togliendo da 100° l'angolo trovato B. Potrebbesi determinare C anche direttamente, mediante la proporzione $b : c :: R \tan C$. Conosciuto che sarà l'angolo B, si troverà l'ipotenusa usando la proporzione $\operatorname{sen} B : R :: b : a$; oppure si può avere a direttamente, osservando che $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; ma questa espressione, nella quale $b^2 + c^2$ non può scomporsi in fattori, è poco comoda pel calcolo logaritmico.

CASO TERZO.

LI. *Data l'ipotenusa* a *e un angolo acuto* B, *trovare gli altri due lati* b *e* c.

Si stabiliranno le due proporzioni $R : \operatorname{sen} B :: a : b$, $R : \cos B :: a : c$, e per mezzo di esse si ricaveranno i valori di b e c. Quanto all'angolo C, si osserverà che esso è complemento di B, e perciò $C = 100° - B$.

CASO QUARTO.

LII. *Dati un cateto* b, *e un angolo acuto, trovare l'ipotenusa* a *e l'altro cateto* c.

Conoscendo uno degli angoli acuti, si può conoscere ancora l'altro, come complemento del primo; e così può supporsi che sieno dati il cateto b e l'angolo opposto B. Allora per determinare a e c si farà uso delle proporzioni

$$\operatorname{sen} B : R :: b : a, \quad R : \cot B :: b : c.$$

Risoluzione dei triangoli rettilinei in generale.

Sieno A, B, C i tre angoli di un triangolo rettilineo proposto, e sieno a, b, c i tre lati opposti rispettivamente ai detti angoli: i differenti problemi che possono aver luogo per determinare tre di queste quantità, quando le altre tre son date, riduconsi ai quattro casi seguenti.

CASO PRIMO.

LIII. *Dato un lato* a *e due angoli del triangolo, trovare gli altri due lati* b *e* c.

I due angoli dati faran conoscere immediatamente il terzo, comecchè questo è supplemento dei primi. Indi si troveranno i due lati b e c, per via delle proporzioni (XLIV).

$$\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B :: a : b, \quad \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C :: a : c.$$

CASO SECONDO.

LIV. *Dati due lati* a *e* b, *coll'angolo* A *opposto ad uno di essi, trovare il terzo lato* c, *e gli altri due angoli* B e C.

Si troverà dapprima l'angolo B, mediante la proporzione

$$a : b :: \text{sen } A : \text{sen } B.$$

Sia M l'angolo acuto che ha per seno $\frac{b \text{ sen } A}{a}$; e, dietro questo valore di sen B, si potrà prendere $B = M$, oppure $B = 200^\circ - M$ (*). Ma queste due soluzioni non avran luogo se non quando sia ad un tempo l'angolo A acuto e $b > a$. Se l'angolo A è ottuso, B non potrà esserlo, quindi non vi sarà che una soluzione; e se, essendo A acuto, sia dippiù $b < a$, anche in questo caso non vi sarà che una soluzione soltanto; perchè allora si ha $M < A$, e facendo $B = 200^\circ - M$, si avrebbe $A + B > 200^\circ$, il che non può aver luogo.

Conoscendo gli angoli A e B, si otterrà il terzo C, togliendo da 200° la somma de' due primi. In seguito avrassi il terzo lato c, mediante la proporzione

$$\text{sen } A : \text{sen } C :: a : c.$$

Si può anche direttamente dedurre c per mezzo dell'equazione

$$\cos A = R\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

che risoluta rispetto a c dà

$$c = \frac{b \cos A}{R} \pm \sqrt{a^2 - \frac{b^2 \text{ sen}^2 A}{R^2}},$$

Ma questo valore non può calcolarsi con i logaritmi se non mediante un angolo ausiliario M o B; il che rientra nella soluzione precedente (**).

(*) Tenendo presente che due angoli supplementi l'uno dell'altro hanno uno stesso seno.

(**) Volendo dare uno sviluppo maggiore alla discussione del problema in quistione, si riprenda la formola che dà il lato c in funzione degli altri due lati b ed a, e dell'angolo A opposto a quest'ultimo, e, per più semplicità, facciasi $R = 1$; sarà così

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \text{ sen}^2 A},$$

o meglio

(1) $$c = b \cos A \pm a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \text{ sen}^2 A}$$

Or facendo per brevità di calcolo

(2) $$\frac{b}{a} \text{ sen } A = \text{sen } \alpha,$$

CASO TERZO.

LV. *Dati due lati* a *e* b *coll'angolo compreso* C, *trovare gli altri due angoli* A *e* B, *e il terzo lato* c.

Conoscendo l'angolo C, si conoscerà pure la somma degli altri due

---

essendo α un angolo *ausiliario*, il cui valore è determinato da quest' ultima formola, si avrà nel tempo stesso

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} A}, \quad \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2 A} = \cos \alpha,$$

e quindi la (1) diverrà

$$c = a \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos A}{\operatorname{sen} A} \pm a \cos \alpha,$$

oppure finalmente

$$(3) \qquad c = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha \pm A)}{\operatorname{sen} A}$$

Il doppio segno, che trovasi nel secondo membro di quest'ultima equazione, come in tutte le precedenti, mostra già ad evidenza che il problema deve in generale ammettere due soluzioni. Per vedere dunque in quali casi abbian luogo e se abbian luogo sempre, faremo le diverse ipotesi su i valori dei dati.

1.° Se $b < a$, la (2) ci dà sen $\alpha <$ sen A, e perciò, se $A < 100^\circ$, sarà $\alpha < A$, e se $A > 100^\circ$, sarà $\alpha > A$. Dunque nel primo caso la formola (3) darà per c due valori uno positivo, l'altro negativo. E come nella trigonometria non si considera che il solo valore numerico dei lati, così la soluzione negativa dovrà rigettarsi, nè vi resterà in tal caso che una soluzione sola del problema. Nel secondo caso poi, essendo $\alpha > A$, ed $A > 100^\circ$, l'arco $\alpha + A$ sarà maggiore di una semicirconferenza e quindi sen $(\alpha + A)$ sarà una quantità negativa; ma sen $(\alpha - A)$ sarà positivo. Laonde avremo anche in questo caso che la formola (3) darà due valori algebrici, l'uno positivo, l'altro negativo, e, trigonometricamente parlando, il problema non ammetterà che una soluzione sola.

2.° Se $b > a$, la formola (2) darà $\alpha > A$, se $A < 100^\circ$; e $\alpha < A$, se $A > 100^\circ$. Nella prima ipotesi, sen $(\alpha + A)$, sen $(\alpha - A)$ avranno l'uno e l'altro un valore positivo; quindi la (3) darà per c due valori anche positivi, ed il problema ammetterà per conseguenza due soluzioni. Ma nella seconda ipotesi sen $(\alpha - A)$ è evidentemente negativo; e lo è pure sen $(\alpha - A)$, se si osserva che, essendo $A > 90^\circ$, ed $A > \alpha$, si ha cos $A < \alpha$, e cos $A >$ cos α, sen $A <$ sen α, laonde nella formola

$$\operatorname{sen}(A + \alpha) = \operatorname{sen} A \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos A,$$

il secondo termine del secondo membro è negativo e maggiore del primo termine. Pertando risultando negativi anche i valori di c, il problema non ammette soluzione alcuna.

3.° Se $b = a$, allora per la relazione (2) si avrà

$$\alpha = A, \text{ oppure } \alpha = 200^\circ - A.$$

Nell'uno e nell'altro di questi due casi la formola (3) darà per c un valore nullo ed un altro eguale a $2\,a \cos A$. Dunque in questo terzo caso, che è quello del triangolo isoscele, vi sarà pure una soluzione soltanto. È da osservarsi pertanto che deve essere sempre $A < 100^\circ$, altrimenti la formola $2\,a \cos A$, e quindi il valore di c risulta negativo.

4.° Quando si avesse $a = b$ sen A, la (2) darebbe sen $\alpha = 1$, e quindi $\alpha = 100^\circ$. Laonde la (3) darebbe $c = a$ tang A. Il triangolo dunque sarebbe in questo caso rettangolo, nè si avrebbe che una sola soluzione.

5.° In fine se fosse $a < b$ sen A, la (2) darebbe sen $\alpha > 1$: risultamento imma-

angoli, perchè si ha $A+B=200^\circ-C$, e la loro semisomma $\frac{1}{2}(A+B)$ sarà $=100^\circ-\frac{1}{2}C$. In seguito si calcolerà la semidifferenza di questi stessi angoli coll'uso della proporzione (XLVII).

$$a+b : a-b :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B),$$

ove si suppone $a>b$, e per conseguenza $A>B$.

Trovata la semidifferenza $\frac{1}{2}(A-B)$, se la si aggiunga alla semisomma $\frac{1}{2}(A+B)$, avrassi l'angolo maggiore A; e togliendo la stessa semidifferenza dalla semisomma, si avrà l'angolo minore B. In fatti, essendo A e B due quantità qualunque si ha sempre

$$A=\tfrac{1}{2}(A+B)+\tfrac{1}{2}(A-B),$$
$$B=\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Conosciuti gli angoli A e B, si otterrà il terzo lato c, per mezzo della proporzione

$$\text{sen}\,A : \text{sen}\,C :: a : c.$$

LVI. Accade spesso nei calcoli trigonometrici, che i due lati a e b sieno conosciuti per mezzo de' loro logaritmi; allora per non esser costretti a cercarne i due numeri corrispondenti, si cercherà soltanto un angolo φ per mezzo della proporzione $b : a :: R : \text{tang}\,\varphi$. Quest'angolo φ sarà sempre maggiore di 50°, perchè si è supposto $a>b$, togliendo dunque 50° da φ, si stabilirà la proporzione $R : \text{tang}\,(\varphi-50^\circ) :: \cot\frac{1}{2}C : \text{tang}\,\frac{1}{2}(A-B)$, dalla quale si dedurrà, come più sopra, il valore di $\frac{1}{2}(A-B)$ e quindi quelli di A e B.

Questa soluzione è fondata sul principio che

$$\text{tang}\,(\varphi-50^\circ)\,\frac{R^2\,\text{tang}\,\varphi-R^2\,\text{tang}\,50^\circ}{R^2+\text{tang}\,\varphi\,\text{tang}\,50^\circ},$$

e come $\text{tang}\,\varphi=\frac{aR}{b}$, e $\text{tang}\,50^\circ=R$, sarà

$$\text{tang}\,(\varphi-50^\circ)=\frac{R(a-b)}{a+b};$$

quindi

$$a+b : a-b :: R : \text{tang}\,(\varphi-50^\circ) :: \cot\tfrac{1}{2}C :: \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Il terzo lato c si può ancora trovarlo direttamente, per mezzo dell'equazione

$$\frac{\cos C}{R}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

la quale dà

$$c=\sqrt{a^2+b^2-\frac{2ab\cos C}{R}}$$

---

ginario, e quindi il problema sarà *assolutamente impossibile*, vale a dire che in questo caso i lati e l'angolo così dati, non possono appartenere ad un triangolo rettilineo.

Riassumendo il fin qui detto, emerge che il problema in quistione ammetterà

Due soluzioni	se $b>a$, e $A<100^\circ$
Una soluzione	se $b<a$ e $A \gtrless 100^\circ$,
Una soluzione	se $b=a$ e $A<100^\circ$
Nessuna soluzione	se $b>a$ e $A>100^\circ$.

Ma questo valore non si accomoda molto al calcolo logaritmico, a meno che i numeri rappresentati da a, b e $\cos C$, non fossero semplicissimi.

Pertanto è da osservarsi che il precedente valore di c può esser messo sotto le forme seguenti

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{R^2}}$$

$$c = \sqrt{(a+b)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{R^2} + (a-b)^2 \frac{\cos^2 \frac{1}{2} C}{R^2}}$$

che si verificano facilmente per mezzo delle formole

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} \cos C, \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R \cos C.$$

Le precedenti espressioni di c saranno particolarmente utili, allorchè essendo l'angolo C piccolissimo, e piccolissima la differenza $a-b$, si voglia calcolare c con molta precisione. L'ultima delle dette espressioni fa vedere che c sarebbe l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo formato con i cateti $(a+b)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2} C}{R}$ e $(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2} C}{R}$;

e a questa conclusione si può giungere, mediante una costruzione semplicissima.

Sia CAB (*fig.* 6) il triangolo proposto, nel quale si conoscano i due lati $CB=a$, $CA=b$, e l'angolo compreso C. Dal punto C, come centro, e con un raggio CB uguale al maggiore dei due lati dati, si descriva una circonferenza che incontri in D ed in E il lato AC prolungato; si congiungano BD, BE, e si meni AF perpendicolare a BD. L'angolo DBE, come inscritto nella semicirconferenza, sarà retto, e perciò le due rette AF, BE saran parallele, e si avrà la proporzione

$$BF : AE :: DF : AD :: \cos D : R.$$

Si avrà parimente, dal triangolo rettangolo DAF, l'altra proporzione

$$AF : DA :: \operatorname{sen} D : R.$$

Sostituendo dunque i valori di $DA = DC + CA = a+b$, $EA = CE - CA = a-b$, $D = \frac{1}{2} C$ si avrà

$$AF = \frac{(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2} C}{R}\quad BF = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2} C}{R},$$

Dunque, in effetti, il terzo lato AB del triangolo proposto è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABF, i cui cateti sono $(a+b)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2} C}{R}$, $(a-b)\frac{\cos\frac{1}{2} C}{R}$.

Se in questo triangolo si cerca l'angolo ABF, opposto al lato AF, e se ne sottragga l'angolo $CBD = \frac{1}{2} C$, si avrà l'angolo B del triangolo ABC. Da ciò si vede che la risoluzione del triangolo ABC, nel quale si conoscono i due lati a e b e l'angolo compreso C, si riduce immediatamente a quella del triangolo rettangolo ABF, nel quale si conoscono i due cateti, cioè

$$AF = (a+b)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2} C}{R} \text{ e } BF = (a-b)\frac{\cos\frac{1}{2} C}{R}.$$

Quindi, in virtù d'una tale costruzione, potrebbe trasandarsi la proposizione del n.° 47.

CASO QUARTO.

LVII. *Dati i tre lati* a, b, c, *trovare i tre angoli* A, B, C.
L'angolo A, opposto al lato a, si troverà per mezzo della formola

$$\cos A = R\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c},$$

e si determineranno similmente gli altri due angoli B, C, mediante le formole

$$\cos B = R\,\frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c},\quad \cos C = R\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b}$$

Ma questo caso si può risolvere con una formola più comoda pel calcolo logaritmico. Per trovarla si osservi dapprima che

$$R^2 - R\cos A = 2\,\mathrm{sen}^2\,\tfrac{1}{2}A,$$

e perciò, sostituendo in questa formola il precedente valore di $\cos A$, avrassi

$$2\,\mathrm{sen}^2\,\tfrac{1}{2}A = R^2\,\frac{a^2-b^2-c^2+2\,bc}{2\,bc} = R^2\,\frac{a^2-(b-c)^2}{2\,bc}$$

$$= R^2\,\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{2\,bc}$$

e quindi

$$\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}A = R\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)}{4\,bc}}.$$

Facciasi per semplicità $a+b+c=2p$, e si avrà $a+b-c=2p-2c$, e $a+c-b=2p-2b$; dunque in fine si avrà la formola richiesta

$$\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}\,A = R\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}$$

la quale conduce ancora alla proporzione

$$bc : (p-b)\,(p-c) :: R^2 : \mathrm{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,A,$$

e che è facile a calcolarsi per mezzo dei logaritmi. Conoscendo il logaritmo di sen $\tfrac{1}{2}A$, si conoscerà ancora $\tfrac{1}{2}A$, il cui doppio sarà l'angolo cercato A. Si potrà operare analogamente in ordine a ciascuno degli altri due angoli B e C.

Sonovi ancora altre formole egualmente proprie a risolvere la quistione. E dapprima la formola $R^2+R\cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A$, dà

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\,A = R^2\,\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{4\,bc} = R^2\,\frac{(b+c)^2-a^2}{4\,bc} = R^2\,\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4\,bc};$$

e ponendo, come sopra, $a+b+c=2p$, donde $b+c-a=2p-2a$, verrà

$$\cos\frac{1}{2}A=R\sqrt{\frac{(p-a)\,p}{bc}}$$

ed in fine, osservando che $\tang\frac{1}{2}A=\frac{R\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}$, si avrà

$$\tang\frac{1}{2}A=R\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

Esempi della risoluzione de' triangoli rettilinei.

LVIII. *Esempio* I. Supponiamo che vogliasi conoscere l'altezza AB (*fig.* 7) d'un edificio, nell'ipotesi che il piede A fosse accessibile.

Si misuri sul terreno, supposto quasi a livello, una base AD che non sia nè troppo grande nè troppo piccola rispetto all'altezza AB; indi si ponga in D il piede del cerchio, o di quell'istrumento qualunque, col quale devesi misurare l'angolo formato dalla linea orizzontale CE, parallela ad AD, e dal raggio visuale CB diretto al vertice dell'edificio. Supponiamo che, fatte tali operazioni, siasi trovato AD, ovvero CE $=67^{\text{metri}}, 84$, e l'angolo BCE $=45°\ 64'$; allora per avere BE, bisognerà risolvere il triangolo rettangolo BCE, nel quale si conosce l'angolo C e il lato adiacente EC. Quindi a norma del caso IV de' triangoli rettangoli, si farà la proporzione $R:\tang 45°64'::67,84:\text{BE}$ dalla quale si trae

$$\text{L. }BE=\text{L}\tang 45°\ 64'+\text{L. }67,\ 84-\text{L. }R.$$

Or

L. tang 45° 64'	9,9403263
L. 67, 84	1,8314858
Somma — L. *R*.	11,7718121.

Questo logaritmo corrisponde al numero 59, 130; quindi sarà BE $=59^{m}, 13$. Aggiungendo a BE l'altezza dell'istrumento CD, ovvero l'altezza AE, che suppongo di $1^{m}, 12$, si avrà l'altezza cercata

$$AB=60^{m},\ 25.$$

Se nello stesso triangolo BEC si volesse conoscere l'ipotenusa BC, si stabilirà la proporzione

$$\cos 45°\ 74':R::67,\ 84:\text{BC},$$

e quindi il calcolo logaritmico

L. *R* + log 67, 84	11,8314858
L. cos 45° 64'	9,8772784
Differenza	1,9542074 = log BC.

Dunque BC $=89^{m}, 993$.

N. B. Se non si vedesse che il solo vertice B dell'edificio, o del luogo qualunque, di cui vuolsi conoscere l'altezza, si determinerebbe la distanza BC, col metodo che sarà esposto nell'esempio seguente; quindi questa distanza e l'angolo cognito BCE basteranno per risolvere il triangolo rettangolo BCE, il cui lato BE, aumentato dell'altezza dell'istrumento, sarà l'altezza dimandata.

LIX. *Esempio* II. Per avere sul terreno la distanza del punto A (*fig.* 8) da un oggetto invariabile B, si misurerà una base AD, e i due angoli adiacenti BAD, ADB. Supponiamo che siasi trovato

$$AD = 588^m,\ 45,\ BAD = 115^\circ\ 48',\ \text{e}\ BDA = 40^\circ\ 8'.$$

Si avrà immediatamente il terzo angolo ABD = 44° 44'; e per avere AB si farà la proporzione sen ABD : sen ADB :: AD : AB; e quindi il calcolo logaritmico

L. AD	2,7697096
L. sen ADB	9,7699689
Somma.	12,5396785
L. sen ABD	9,8080314
L. AB	2,7316471

Dunque la distanza cercata AB = 539^m, 07.

Se per un altro oggetto inaccessibile C, si son trovati gli angoli CAD = 39° 17', ADC = 132° 83', si conchiuderà similmente, con questi dati, la distanza AC = 1202^m, 32.

LX. *Esempio* III. Per trovare la distanza fra due oggetti inaccessibili B e C (*fig.* 8), si determineranno AB ed AC, come nell'esempio precedente, e si avrà nel tempo stesso l'angolo compreso BAC = BAD — DAC (1). Supponiamo che siasi trovato AB = 539^m, 07; AC = 1202^m, 32; e l'angolo BAC = 76° 31'; allora per avere BC, bisognerà risolvere il triangolo BAC, nel quale si conoscono due lati, e l'angolo compreso. Or, giusta il caso terzo, si ha la proporzione

$$AC + AB : AC - AB :: \text{tang}\ \frac{B+C}{2} : \text{tang}\ \frac{B-C}{2},\ \text{ovvero}$$

$$1741,\ 39 : 663,\ 25 :: \text{tang}\ 61^\circ\ 84'\ \tfrac{1}{2} : \text{tang}\ \frac{B-C}{2};$$

e quindi

L. 663, 25	2,8216773
L. tang. 61°, 84' $\frac{1}{2}$	10,1654748
Somma	12,9871521
L. 1741,39	3,2408960
L. tang $\frac{B-C}{2}$	9,7462561

(1) Potrebbe avvenire che i quattro punti A, B, C, D non fossero in un medesimo piano; allora l'angolo BAC non sarebbe più la differenza tra BAD e DAC, e bisognerebbe avere, con una misura diretta, il valore di quest'angolo; all'infuori di questa circostanza, tutto il resto dell'operazione sarebbe la stessa.

Dunque . . . . $\frac{B-C}{2} = 32° 37', 8$

Ma si ha . . . . $\frac{B+C}{2} = 61° 84', 5$

Dunque . . . . $B = 94° 22', 3$

e . . . . $C = 29° 46', 7$

Ora per avere la distanza BC, si farà la proporzione sen B : sen A :: AC : BC, ovvero

sen 94° 22', 3 : sen 76° 31' :: 1202, 32 : BC,

e quindi

L. 1202,32	3,0800200
L. sen 76° 31'	9,9692099
Somma	13,0492299
L. sen 94° 22' 3	9,9982096
L. *BC*.	3,0510203

Dunque la distanza cercata BC = 1124^m, 66.

LXI. *Esempio* IV. Essendo dati tre punti A, B, C (*fig.* 9) sulla carta di un paese, determinare la posizione d'un quarto punto M, da cui si son misurati sul terreno gli angoli AMB, AMC; supponendo che i quattro punti sieno situati in un medesimo piano.

Sulla retta AB descrivasi il segmento AMDB, capace dell'angolo dato BMA; e similmente sulla AC, si descriva il segmento AMC capace dell'angolo dato AMC; i due archi descritti si taglieranno in due punti A ed M, e quest'ultimo sarà il punto cercato. In effetti i punti dell'arco AMDB sono i soli da cui si possa vedere AB sotto un angolo eguale ad AMB, e così pure i punti dell'arco AMC sono i soli da' quali si possa vedere AC sotto un angolo eguale ad AMC; dunque il punto M, intersezione di questi due archi, è pure il solo da cui si possano vedere ad un tempo AB ed AC sotto gli angoli AMB, AMC. Si tratta ora di calcolare trigonometricamente, e dietro questa costruzione, la posizione del punto M.

Sieno dati AB = 2500^m, AC = 7000^m, BC = 9000^m, AMB = 30° 80' AMC = 121° 40'. Nel triangolo ABC, in cui si conoscono i tre lati, si determinerà l'angolo BAC per mezzo della formola sen^2 $\frac{1}{2}$ $A = R^2 \frac{6750 \times 2250}{2500 \times 7000}$ (LVII); dalla quale si deduce successivamente

$$2 \text{ L. sen } \tfrac{1}{2} A = 19,9384483$$
$$\text{L. sen } \tfrac{1}{2} A = 9,9692241$$
$$\tfrac{1}{2} A = 76° 31', 5$$
$$A = 152° 63'$$

Si tiri ora il diametro AD e si congiunga DB: nel triangolo BAD rettangolo in B si avrà il lato BA = 2500, e l'angolo opposto BDA = BMA = 30° 80', donde risulta l'ipotenusa $AD = \frac{R \times AB}{\text{sen BDA}}$ = 5374m, 6. Menando similmente il diametro AE, e congiungendo CE, si avrà un triangolo rettangolo ACE, in cui si conosce il lato AC = 7000; e l'angolo adiacente CAE = AMC — 100° = 21° 40'; e quindi si avrà $AE = \frac{R \times AC}{\cos CAE} = 7415^m$.

Or se si tirano le rette MD ed ME, i due angoli AMD, AME, essendo retti, la linea DME sarà retta. Resta dunque a risolversi il triangolo DAE, in cui la retta AM, della quale devesi determinare la grandezza e la posizione, è perpendicolare a DE. Or in questo triangolo si hanno i lati dati AD = 5374,6, AE = 7415, e l'angolo compreso DAE = BAC + CAE — DAB = 104° 83'. Con questi dati si troverà l'angolo ADE = 56° 93'; ed infine pel triangolo rettangolo DAM si avrà AM = 4190m, 83. Questa distanza e l'angolo BAM = 112° 27' determinano interamente la posizione del punto M.

Nota. Se vogliansi calcolare gli stessi esempi, per mezzo delle tavole costruite secondo l'antica divisione del cerchio, bisognerà cangiare come segue l'espressione degli angoli dati e di quelli calcolati; del resto tutti i valori logaritmici a quelli dei lati resteranno gli stessi.

Esempio I. Angolo dato BCE = 41° 4' 33", 6, o più semplicemente BCE = 41° 4' 0" (ved. n.° LVIII), perchè in questa sorte di operazioni qualche secondo in più o in meno non influisce sensibilmente sulla distanza che si vuol determinare.

Esempio II. (n.° LIX) Angoli dati BAD = 103° 55' 53", 2, BDA = 36° 4' 19", 2, ABD = 39° 59' 45", 6 CAD = 35° 15' 10" 8, ADC = 119° 32 49" 2.

Esempio III. (n.° LX) Angolo dato BAC = 68° 40' 44", 4,

Angolo $\frac{1}{2}$ $(B+C)$ dedotto dal dato BAC = 55° 39', 37", 8,

Angoli calcolati $\frac{1}{2}$ $(B-C)$ = 29° 8' 24, 7

B = 84' 48' 2", 5, C = 26° 31' 13", 1.

Esempio IV. (n.° LXI) Angoli dati AMB = 27° 43 12', AMC = 109° 15' 36". Angoli calcolati A = 137° 22' 1", 2, DAE = 94° 20' 49", 2, BAM = 101° 2 34', 8. (*).

(*) In qualunque caso per ridurre un angolo dato da gradi, primi e secondi dell'antica divisione, in quelli della divisione decimale, o viceversa, basta tener presente che, secondo la divisione antica, il secondo è $\frac{1}{324000}$ del quadrante, e secondo la divisione decimale, è $\frac{1}{1000000}$ del quadrante medesimo. Quindi il rapporto del minuto antico al nuovo è $\frac{1000000}{324000} = \frac{250}{81}$; e reciprocamente il rapporto del minuto della nuova divisione al minuto dell'antica è $\frac{81}{250}$.

Principii per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

LXII. *In ogni triangolo sferico rettangolo il raggio sta al seno dell'ipotenusa come il seno d'uno degli angoli obbliqui sta al seno del lato opposto.*

Sia ABC (*fig.* 10) il triangolo sferico proposto, A il suo angolo retto, B e C gli altri due angoli, che chiameremo *angoli obbliqui*, e che potranno non per tanto essere l'uno o l'altro retto, o anche tutti e due; dico che si avrà la proporzione R : sen BC : : sen B : sen AC.

Dal centro O della sfera si menino i raggi OA, OB, OC; si prenda in seguito OF eguale al raggio delle tavole, e dal punto F si meni FD perpendicolare sopra OA; e così perchè, per ipotesi, l'angolo A è retto, e i due piani OAB, OAC son perpendicolari tra loro, sarà FD perpendicolare al piano OAB. Dal punto D si meni DE perpendicolare sopra OB, o congiungasi EF, questa retta sarà perpendicolare anche ad OB, e perciò l'angolo DEF misurerà l'inclinazione dei due piani OBA, BOC, e sarà eguale all'angolo B del triangolo ABC. Posto ciò, nel triangolo DEF, rettangolo in D, si ha R : sen DEF : : EF : DF; or l'angolo DEF $= B$, e perchè OF $= R$, si ha EF $=$ sen EOF $=$ sen BC, DF $=$ sen AC. Dunque sarà

R : sen B :: sen BC : sen AC, ovvero, R : sen BC :: sen B : sen AC.

Se dunque si chiami a l'ipotenusa o il lato opposto all'angolo retto A, b il lato opposto all'angolo B, e c il lato opposto all'angolo C, si avranno le proporzioni

$$R : \text{sen}\, a :: \text{sen}\, B : \text{sen}\, b :: \text{sen}\, C : \text{sen}\, c,$$

le quali forniscono due equazioni tra le parti del triangolo sferico rettangolo.

LXIII. *In ogni triangolo sferico rettangolo, il raggio sta al coseno d'un angolo obbliquo, come la tangente dell'ipotenusa sta alla tangente del lato adiacente a quest'angolo.*

Sia sempre ABC (*fig.* 10) il triangolo proposto rettangolo in A, dico che si avrà

$$R : \cos B :: \text{tang BC} : \text{tang AB}.$$

In fatti, eseguita la stessa costruzione come nel caso precedente, il triangolo rettangolo DEF darà la proporzione

$$R : \cos \text{DEF} :: \text{EF} : \text{ED}$$

Or si ha DEF $= B$, EF $=$ sen BC, OE $=$ cos BC, e nel triangolo OED rettangolo in E, si ha DE $= \frac{\text{OE tang DOE}}{R} = \frac{\text{cos BC tang AB}}{R}$;

dunque

$$R : \cos B :: \text{sen BC} : \frac{\cos \text{BC} \tang \text{AB}}{R} :: \frac{R \text{ sen BC}}{\cos \text{BC}} : \tang \text{AB},$$

o in fine

$$R : \cos B :: \tang \text{BC} : \tang \text{AB}.$$

Se si fa, come più sopra BC $= a$, ed AB $= c$, si avrà

$$R : \cos B :: \tang a : \tang c,$$

ovvero

$$\cos B = \frac{R \tang c}{\tang a} = \frac{\tang c \cot a}{R}.$$

Lo stesso principio applicato all'angolo C, darà

$$\cos C = \frac{R \tang b}{\tang a} = \frac{\tang b \cot a}{R}.$$

LXIV. *In ogni triangolo sferico rettangolo il raggio sta al coseno d'un lato dell'angolo retto, come il coseno dell'altro lato sta al coseno dell' ipotenusa.*

Sia ABC (*fig.* 10) il triangolo sferico rettangolo in A; dico che si avrà la proporzione

$$R : \cos \text{AB} :: \cos \text{AC} : \cos \text{BC}.$$

Intendasi fatta la stessa costruzione come ne' due casi precedenti: allora il triangolo ODF, rettangolo in D, e la cui ipotenusa OF $=$ R, darà OD $= \cos$ DOF $= \cos$ AC; e similmente il triangolo ODE rettangolo in E, darà

$$\text{OE} = \frac{\text{OD} \cos \text{DOE}}{R} = \frac{\cos \text{AC} \cos \text{AB}}{R}$$

Ma nel triangolo rettangolo OEF, si ha OE $= \cos$ BC; dunque

$\cos \text{BC} = \dfrac{\cos \text{AC} \cos \text{AB}}{R}$, che è lo stesso

$$R : \cos \text{AC} :: \cos \text{AB} : \cos \text{BC}.$$

Questo terzo principio esprimesi colla equazione

$$R \cos a = \cos b \cos c;$$

nè è suscettibile di fornire una seconda, come i due precedenti, dacchè col fare la permutazione tra b e c, non s' apporta cangiamento veruno nell'equazione.

LXV. Per mezzo di questi tre principî generali, se ne possono trovare tre altri necessarî per la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli. E questi ultimi principî potrebbero dedursi ciascuno da una costruzione particolare; ma val meglio dedurli dai primi tre per via di analisi, alla maniera seguente.

Le equazioni

$$\text{sen}\, B = \frac{R\, \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a},\ \cos C = \frac{R\, \text{tang}\, b}{\text{tang}\, a},$$

divise l'una per l'altra, danno

$$\frac{\cos C}{\text{sen}\, B} = \frac{\text{tang}\, b}{\text{sen}\, b} \cdot \frac{\text{sen}\, a}{\text{tang}\, a} = \frac{\cos a}{\cos b},$$

o pure giusta il principio terzo

$$\frac{\cos C}{\text{sen}\, B} = \frac{\cos c}{R}.$$

Si avrà dunque quest'altro principio quarto

$$\text{sen}\, B : \cos C :: R : \cos c,$$

dal quale emerge colla permutazione delle lettere

$$\text{sen}\, C : \cos B :: R : \cos b.$$

Il primo ed il secondo principio, danno

$$\text{sen}\, B = \frac{R\, \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a},\ \cos B = \frac{R\, \text{tang}\, c}{\text{tang}\, a};$$

e da queste due equazioni deducesi

$$\frac{\text{sen}\, B}{\cos B},\ \text{ovvero}\ \frac{\text{tang}\, B}{R} = \frac{\text{sen}\, b\, \text{tang}\, a}{\text{sen}\, a\, \text{tang}\, c} = \frac{R\, \text{sen}\, b}{\cos a\, \text{tang}\, c}$$

o meglio, in virtù del principio terzo,

$$\frac{\text{tang}\, B}{R} = \frac{R^2\, \text{sen}\, b}{\cos b\, \cos c\, \text{tang}\, c} = \frac{\text{tang}\, b}{\text{sen}\, c}.$$

Dunque si avrà, per quinto principio, l'equazione

$$\text{tang}\, B = \frac{R\, \text{tang}\, b}{\text{sen}\, c},$$

ovvero l'analogia

$$R : \text{tang}\, B :: \text{sen}\, c : \text{tang}\, b,$$

dalla quale, colla permutazione delle lettere, emerge l'altra

$$R : \text{tang}\, C :: \text{sen}\, b : \text{tang}\, c.$$

Finalmente queste due formole danno

$$\text{tang}\, B\, \text{tang}\, C = \frac{R^2\, \text{tang}\, b\, \text{tang}\, c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c} = \frac{R^4}{\cos b\, \cos c};$$

ed in virtù del principio terzo

$$\text{tang } B \text{ tang } C = \frac{R^3}{\cos a}.$$

Dunque

$$R^3 = \cos a \text{ tang } B \text{ tang } C, \text{ ovvero } \cot B \cot C = R \cos a,$$

o pure in fine

$$\text{tang } B : \cot C :: R : \cos a.$$

È questo il sesto ed ultimo principio; nè desso è suscettivo a fornire un'altra equazione, dacchè la permutazione delle lettere non apporta cangiamento alcuno.

Ecco la ricapitolazione di questi sei principi; quattro de'quali danno due equazioni ciascuno:

I. $R \text{ sen } b = \text{sen } a \text{ sen } B$, $R \text{ sen } c = \text{sen } a \text{ sen } C$,
II. $R \text{ tang } b = \text{tang } a \cos C$, $R \text{ tang } c = \text{tang } a \cos B$,
III. $R \cos a = \cos b \cos c$,
IV. $R \cos B = \text{sen } C \cos b$, $R \cos C = \text{sen } B \cos c$
V. $R \text{ tang } b = \text{sen } c \text{ tang } B$, $R \text{ tang } c = \text{sen } b \text{ tang } C$
VI. $R \cos a = \cot B \cot C$,

Risultano così dieci equazioni contenenti tutte le relazioni che possono esistere fra tre de' cinque elementi B, C, a, b, c; di talchè, conoscendo due qualunque di queste quantità insieme all' angolo retto, si conoscerà ciascuna delle rimanenti, mediante il suo seno, o coseno, la sua tangente, o cotangente.

LXVI. È da osservarsi che quando un elemento sarà determinato mediante il suo seno, vi saranno due valori per questo elemento, e per conseguenza due triangoli che soddisferanno alla quistione. Imperciocchè lo stesso seno che appartiene ad un arco o ad un angolo, appartiene ancora al suo supplemento. Non è più lo stesso però quando l' elemento incognito sarà determinato per mezzo del suo coseno, o della sua tangente: allora in effetti il segno di queste linee trigonometriche farà decidere se l'elemento è maggiore oppure minore di 100°; e segnatamente se il segno è il +, l' elemento incognito sarà minore di 100°, e se il segno è il —, l' elemento incognito sarà maggiore di 100°. A tale proposito si potrebbero stabilire de' precetti generali, i quali sarebbero delle conseguenze delle sei equazioni dimostrate.

Per esempio, risulta dall'equazione $R \cos a = \cos b \cos c$, che i tre lati d'un triangolo sferico son tutti minori di 100°, oppure due sono più grandi e il terzo più piccolo di 100°. Nessun'altra combinazione può rendere il segno di $\cos b \cos c$ simile a quello di $\cos a$, come la precedente equazione lo esige,

Similmente l' equazione $R \text{ tang } c = \text{sen } b \text{ tang } C$, in cui sen b è sempre positivo, prova che tang C ha sempre lo stesso segno di tang c. Dunque *in ogni triangolo sferico rettangolo un angolo obbliquo e il*

lato che gli si oppone, sono sempre della stessa specie; vale a dire sono tutti e due maggiori, o tutti e due minori di 100°.

Risoluzione dei triangoli sferici rettangoli.

LXVII. Un triangolo sferico può avere tre angoli retti, e allora ciascuno dei suoi tre lati è di 100°; può avere due soli angoli retti, e allora ciascuno dei lati opposti a questi angoli è di 100°, e il terzo lato ed il terzo angolo a questo lato opposto vengono l'uno e l'altro misurati da uno stesso numero di gradi. Queste due specie di triangoli, come si vede, non possono dar luogo ad alcun problema, che perciò può farsene astrazione, e considerare invece quei triangoli che hanno un solo angolo retto.

Sia A l'angolo retto, B e C gli altri due angoli, chiamati *angoli obbliqui;* sia a l'ipotenusa, opposta all'angolo A, e b e c gli altri due lati opposti rispettivamente agli angoli B e C. Date due delle cinque quantità B, C, a, b, c, la risoluzione del triangolo si ridurrà sempre ad uno dei sei casi seguenti.

CASO PRIMO.

LXVIII. *Data l'ipotenusa* a, *e dato un lato* b, *trovare i due angoli* B *e* C, *e il terzo lato* c.

Serviranno all'uopo le tre equazioni

$$\operatorname{sen} B = \frac{R \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}, \quad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b \cot a}{R}, \quad \cos c = \frac{R \cos a}{\cos b}.$$

L'angolo C non può lasciare incertezza alcuna, egualmente che il lato c; in ordine poi all'angolo B si osserverà che esso dev'essere della specie medesima dell'angolo b.

CASO SECONDO.

LXIX. *Dati i due lati* b *e* c *dell'angolo retto, trovare l'ipotenusa* a *e gli angoli* B *e* C.

Si risolverà il problema mediante le tre equazioni

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{R}, \quad \operatorname{tang} B = \frac{R \operatorname{tang} b}{\operatorname{sen} c}, \quad \operatorname{tang} C = \frac{R \operatorname{tang} c}{\operatorname{sen} b}.$$

In questo caso non v'ha luogo ad ambiguità veruna.

CASO TERZO.

LXX. *Data l'ipotenusa* a *e dato un angolo* B, *trovare gli altri due lati* b *e* c, *e l'angolo* C.

Si risolverà questo caso, per via delle equazioni seguenti.

$$\text{sen } b = \frac{\text{sen } a \text{ sen } B}{R},\ \text{tang } c = \frac{\text{tang } a \cos B}{R},\ \cot C = \frac{\cos a \text{ tang } B}{R}.$$

Gli elementi c e C son determinati senz'ambiguità da queste formole; quanto al lato b si osserverà che esso dev'essere della specie medesima dell'angolo B.

CASO QUARTO.

LXXI. *Dato il lato* b *dell'angolo retto, e l' angolo* B *opposto a questo lato, trovare l'ipotenusa* a, *l'altro lato* c *e l'angolo* C.

Per risolvere questo caso si farà uso delle tre equazioni seguenti

$$\text{sen } a = \frac{R \text{ sen } b}{\text{sen } B},\ \text{sen } c = \frac{\text{tang } b \cot B}{R},\ \text{sen } C = \frac{R \cos B}{\cos b}.$$

In questo caso i tre elementi incogniti son dati per via di seni; quindi è che la quistione è suscettibile di due soluzioni. Egli è evidente, in effetti, che i due triangoli ABC, AB'C (*fig.* 11) sono amendue rettangoli in A, hanno lo stesso lato $AC = b$, e lo stesso angolo opposto $B = B'$. Del resto i valori doppi debbono combinarsi in modo che c e C sieno della stessa specie; in seguito la specie di c e di b determinano quella di a, all'ispezione della formola $\cos b \cos c = R \cos a$; ma il valore di a si determinerà direttamente per mezzo dell'equazione $\text{sen } a = \dfrac{R \text{ sen } b}{\text{sen } B}$.

CASO QUINTO.

LXXII. *Dato un lato* b *dell'angolo retto, e l'angolo adiacente* C *trovare gli altri tre elementi* a, c, B.

Questo caso si risolve colle tre formole

$$\cot a = \frac{\cot b \cos C}{R},\ \text{tang } c = \frac{\text{sen } b \text{ tang } C}{R},\ \cos B = \frac{\cos b \text{ sen } C}{R}.$$

Nè vi può essere incertezza alcuna sulla specie degli elementi incogniti.

CASO SESTO.

LXXIII. *Dati gli angoli obbliqui* B *e* C, *trovare i tre lati* a, b, c.

Si risolverà questo problema per mezzo delle formole

$$\cos a = \frac{\cot B \cot C}{R},\ \cos b = \frac{R \cos B}{\text{sen } C},\ \cos c = \frac{R \cos C}{\text{sen } B}.$$

Ed in questo caso non v'ha neppure incertezza alcuna sul valore dei tre elementi incogniti.

OSSERVAZIONE.

LXXIV. Il triangolo sferico, gli angoli del quale sono A, B, C, ed i cui lati sono a, b, c, corrisponde sempre ad un triangolo polare, i cui angoli sono supplementi de'lati a, b, c, e i lati sono supplementi degli angoli A, B, C; per modo che dinotando con A', B', C' gli angoli del triangolo polare, e con a', b', c' i lati a' detti angoli rispettivamente opposti, si ha

$$A'=200^0-a, B'=200^0-b, C'=200^0-c,$$
$$a'=200^0-A, b'=200^0-B, c'=200^0-C.$$

Posto ciò, se un triangolo sferico ha un lato a eguale ad un quadrante, è visibile che l'angolo A' del triangolo polare sarà retto, e perciò questo triangolo sarà rettangolo. Quindi gli altri due dati, che debbonsi avere, oltre il lato a di 100^o, per risolvere il triangolo proposto, serviranno per risolvere il triangolo polare, che è rettangolo, e conseguentemente il triangolo proposto. Dietro questa osservazione si potrebbero ricavare delle formole simili alle precedenti per risolvere direttamente i triangoli sferici che hanno un lato di 100^o.

Un triangolo isoscele si scompone sempre in due triangoli sferici rettangoli, eguali in tutte le loro parti; quindi la risoluzione dei triangoli sferici isosceli dipende ancora da quella dei triangoli sferici rettangoli.

Sia ABC (*fig.* 12) un triangolo sferico, tale che i due lati AB, BC sieno l'uno supplemento dell'altro; se si prolungano i due lati AB, AC sino ad incontrarsi in D, egli è chiaro che BC e BD saranno eguali, siccome supplementi d'uno stesso lato AB; d'altronde egli è visibile che conosciute le parti del triangolo BCD, si conoscono pure quelle del triangolo ABC, che è il resto del fuso AD, e viceversa. La risoluzione adunque del triangolo ABC, in cui due lati presi insieme formano 200^0, si riduce a quella del triangolo isoscele BCD, o pure a quella del triangolo rettangolo BDE, che è la metà di CBD.

Quando i due lati AB, BC sono l'uno supplemento dell'altro, è necessario che anche gli angoli opposti ACB, BAC sieno l'uno supplemento dell'altro, perchè BCD è supplemento di BCA, e BCD$=D=A$. Dunque non può aversi $a+c=200^o$, senza che si abbia nel tempo stesso $A+C=200^o$, e reciprocamente.

Da tutto ciò si raccoglie che la risoluzione dei triangoli sferici rettangoli, comprende 1° quella dei triangoli sferici che hanno un lato eguale ad un quadrante; 2° quella dei triangoli sferici isosceli; 3° quella de' triangoli sferici ne' quali la somma di due lati è di 200^0 parimente che quella dei due angoli opposti.

Principi per la risoluzione dei triangoli sferici in generale.

LXXV. *In ogni triangolo sferico i seni degli angoli stanno tra loro come i seni dei lati opposti.*

Sia ABC (*fig.* 13) un triangolo sferico qualunque, dico che si avrà

$$\text{sen } B : \text{sen } C :: \text{sen AC} : \text{sen AB}.$$

Dal vertice A si abbassi l'arco AD perpendicolare sul lato opposto BC; i triangoli rettangoli ABD, ACD daranno le proporzioni

$$\text{sen } B : R :: \text{sen AD} : \text{sen AB},$$
$$R : \text{sen } C :: \text{sen AC} : \text{sen AD}.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendo i fattori comuni, si avrà

$$\text{sen } B : \text{sen } C :: \text{sen AC} : \text{sen AB}.$$

Se la perpendicolare AD cadesse al di fuori del triangolo ABC, (*fig.* 14) si avrebbero le medesime due proporzioni, in una delle quali sen C dinoterebbe sen ACD; ma come l'angolo ACD e l'angolo ACB sono l'uno supplemento dell'altro, i loro seni sono eguali, e quindi si avrà sempre

$$\text{sen } B : \text{sen } C :: \text{sen AC} : \text{sen AB}.$$

Sieno a, b, c i lati opposti rispettivamente agli angoli A, B, C, e si avrà, dietro la proporzione precedente

$$\text{sen } A : \text{sen } a :: \text{sen } B : \text{sen } b :: \text{sen } C : \text{sen } c;$$

il che dà la equazione doppia

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}.$$

LXXVI. *In ogni triangolo sferico il coseno d'un angolo è uguale al quadrato del raggio moltiplicato pel coseno del lato opposto, meno il prodotto del raggio pei coseni dei lati adiacenti, il tutto diviso pel prodotto de' seni di questi medesimi lati; vale a dire che per l'angolo C, per esempio, si ha*

$$\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\text{sen } a \text{ sen } b}.$$

E per gli altri due angoli B ed A si avrà similmente

$$\cos B = \frac{R^2 \cos b - R \cos a \cos c}{\text{sen } a \text{ sen } c}, \quad \cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c}.$$

Sia ABC (*fig.* 15) il triangolo proposto, nel quale si faccia BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$. Dal punto O, centro della sfera, si tirino le rette

indefinite OA, OB, AC; prendasi OD ad arbitrio, e pel punto D si menino DE nel piano OCA e DF nel piano OCB, tutte e due perpendicolari ad OD; queste rette incontrino in E ed in F i raggi AO, BO prolungati; in fine congiungasi EF.

L'angolo D del triangolo DEF è per costruzione la misura dell'angolo che fanno tra loro i piani OCA, OCB, quindi l'angolo EDF è uguale all'angolo C del triangolo sferico ACB: or nei triangoli DEF, OEF, si ha XLV

$$\frac{\cos EDF}{R}=\frac{\overline{DE}^2+\overline{DF}^2-\overline{EF}^2}{2\,DE\,.\,DF}$$

$$\frac{\cos EOF}{R}=\frac{\overline{OE}^2+\overline{OF}^2-\overline{EF}^2}{2\,OE\,.\,OF};$$

prendendo dunque nella seconda di queste equazioni il valore di $\overline{EF}^2$, e sostituendolo nella prima, si avrà

$$\frac{\cos EDF}{R}=\frac{\overline{DE}^2+\overline{DF}^2-\overline{OE}^2-\overline{OF}^2+2\,OE\,.\,OF\,\frac{\cos EOF}{R}}{2\,DE\,.\,DF}$$

Or

$$\overline{OE}^2-\overline{DE}^2=\overline{OD}^2,\ \text{ed}\ \overline{OF}^2-\overline{DF}^2=\overline{OD}^2,$$

sarà dunque

$$\cos EDF=\frac{OE\,.\,OF\cos EOF-\overline{OD}^2.\,R}{DE\,.\,DF}.$$

Altro non devesi fare ora che sostituire in questa equazione i valori relativi al triangolo sferico; ma si ha

$$EDF=C,\ EOF=AB=c,\ \frac{OE}{DE}=\frac{R}{\text{sen}\,DOE}=\frac{R}{\text{sen}\,b},\ \frac{OF}{DF}=\frac{R}{\text{sen}\,DOF}$$

$$=\frac{R}{\text{sen}\,a},\ \frac{OD}{DE}=\frac{\cos DOE}{\text{sen}\,DOE}=\frac{\cos b}{\text{sen}\,b},\ \frac{OD}{DF}=\frac{\cos DOF}{\text{sen}\,DOF}=\frac{\cos a}{\text{sen}\,a},$$

Dunque si avrà finalmente

$$\cos C=\frac{R^2\cos c-R\cos a\cos b}{\text{sen}\,a\ \text{sen}\,b}.$$

Questo principio, il quale applicato successivamente a ciascuno dei tre angoli fornisce tre equazioni, basta per la risoluzione di tutti i problemi della trigonometria sferica: dippiù, v'ha rispetto ai triangoli sferici la stessa generalità che ammette il principio dell' art. XLV in ordine ai triangoli piani. In effetti, come si han sempre tre elementi

dati, col mezzo de' quali bisogna determinare gli altri tre, egli è chiaro che questo principio dà le equazioni necessarie per risolvere il problema; equazioni che appartiene all'analisi svilupparle ulteriormente, per dedurne, secondo i differenti casi, le formole le più semplici e le meglio adatte al calcolo logaritmico.

LXXVII. Poichè il principio di cui è parola è assolutamente generale, così dev'egli comprendere tutti gli altri principi relativi a'triangoli sferici, e specialmente il principio del n. LXXV; e ciò è facile verificare alla maniera seguente.

L'equazione

$$\cos C = \frac{R^2 \cos c - R \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

dà $R^2 - \cos^2 C$, ovvero

$$\operatorname{sen}^2 C = \frac{R^2 \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b - R^2 \cos^2 a \cos^2 b + 2 R^3 \cos a \cos b \cos c - R^4 \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b}$$

Or

$$\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b = (R^2 - \cos^2 a)(R^2 - \cos^2 b) =$$
$$R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b.$$

Dunque, sostituendo ed estraendo la radice, si avrà

$$\operatorname{sen} C = \frac{R}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \sqrt{R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b - R^2 \cos^2 c + 2 R \cos a \cos b \cos c}.$$

Pongasi per brevità

$$\sqrt{R^4 - R^2 \cos^2 a - R^2 \cos^2 b - R^2 \cos^2 c + 2 R \cos a \cos b \cos c} = Z,$$

e si avrà

$$\operatorname{sen} C = \frac{RZ}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}, \text{ ovvero } \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} = \frac{RZ}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

I valori di cos A e cos B daranno similmente

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{RZ}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \quad \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{RZ}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

perchè la quantità Z non cangia per nulla, quando si permutano tra loro due qualunque delle tre quantità a, b, c; sarà dunque in fine

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c},$$

come nel n. LXXV.

LXXVIII. I precedenti valori di cos C e sen C, possono servire a trovare gli angoli d'un triangolo sferico, di cui si conoscono i tre

lati ; ma vi sono altre formole molto più commode pel calcolo logaritmico.

In effetti, se nella formola $R^2 - R \cos C = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C$, si sostituisce il valore di cos C, trovato nel numero precedente, si avrà

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = 1 - \frac{\cos C}{R} = \frac{\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - R \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Or il numeratore di questa espressione, si riduce dapprima ad R cos $(a-b) - R \cos c$, ed in virtù della formola

$$R \cos q - R \cos p = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (p+q) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (p-q)$$

si trova

$$R \cos (a-b) - R \cos c = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (c-b+a) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (c-a+b);$$

dunque

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{R^2} = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{c+b-a}{2}\right) \operatorname{sen} \left(\frac{c+a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

e

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = R \sqrt{\left\{ \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{c+b-a}{2}\right) \operatorname{sen} \left(\frac{c+a-b}{2}\right)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \right\}}.$$

Egli è evidente che delle formole analoghe si avrebbero per sen $\frac{1}{2} A$ e sen $\frac{1}{2} B$.

LXXIX. Il problema generale della trigonometria sferica consiste, come già si è detto, nel determinare tre delle sei quantità A, B, C, a, b, c, quando le altre tre son date. A tal fine egli è necessario l'avere delle equazioni tra quattro di queste quantità, prese in tutti i modi possibili : or sei quantità combinate a quattro a quattro, o a due a due, danno $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ combinazioni, quindi vi sarebbero a fare quindici equazioni; ma se si considerano le combinazioni essenzialmente differenti, non se ne avranno più di quattro.

In effetti, 1° la combinazione $abcA$, colla permutazione delle lettere, ne dà altre due, che sono $abcB$, $abcC$;

2° La combinazione $abAB$, ne contiene pure altre due $bcBC$, $acAC$;

3° La combinazione $abAC$, comprende le altre cinque $abBC$, $acAB$, $acBC$, $bcAB$, $bcAC$.

4° In fine la combinazione $aABC$, dà luogo alle altre due $baBC$, $cABC$;

V'ha dunque effettivamente quindici combinazioni: ma le sole che differiscano in essenza sono le quattro $abcA$, $abAB$, $abAC$, $aABC$.

LXXX. L'equazione

$$\cos A = \frac{R^2 \cos a - R \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

rappresenta la prima combinazione $abcA$, e quelle che ne dipendono.

Per formare ora l'equazione corrispondente alla combinazione $abAB$, si dovrà eliminar c dalle due formole che danno i valori di $\cos A$ e $\cos B$; questa eliminazione è stata già fatta (LXXVII) ed ha condotto al risultamento

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}.$$

La terza combinazione $abAC$ si formerà per mezzo delle due equazioni

$$\cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c,$$
$$\cos C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = R^2 \cos c - R \cos a \cos b,$$

eliminando dapprima $\cos c$, il che dà

$$R \cos A \operatorname{sen} c + \cos C \operatorname{sen} a \cos b = R \cos a \operatorname{sen} b,$$

ponendo poi in questa equazione in luogo di $\operatorname{sen} c$ il suo valore $\frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$

e si avrà finalmente l'equazione

$$\cot A \operatorname{sen} C + \cos C \cos b = \cot a \operatorname{sen} b \ (1)$$

per la terza combinazione tra le quattro lettere a, b, A, C.

Per avere in fine la relazione tra A, B, C, a, osservo che in virtù de'numeri XVII e LXXV si ha

$$\cot a \operatorname{sen} b = R \cos a \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = R \cos a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A};$$

---

(1) Per ritenere facilmente questa formola, e trovarla nelle occorrenze, ecco una regola:

1° Con un lato a e l'angolo opposto A.
Con un altro lato b e l'angolo adiacente C
si formi l'equazione fittizia $\cot a \cot A = \cot b \cot C$, avvertendo di mettere le lettere minuscole innanzi alle majuscole.

2° Si moltiplichi da ambe le parti per $\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C$, supponendo il raggio $R = 1$, e si avrà

$$\cot a \operatorname{sen} b \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C.$$

3° Si separino, nel primo membro, le lettere minuscole dalle majuscole, ponendo il segno — innanzi a queste ultime, e si avrà l'equazione

$$\cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C,$$

la quale essendo omogenea, avrà luogo ancora, senza supporre $R = 1$.

dunque moltiplicando l' equazione precedente per sen A, e tenendo presente quest'ultima relazione, si avrà

$$R\cos A\operatorname{sen}C = R\cos a\operatorname{sen}B - \operatorname{sen}A\cos C\cos b.$$

Se in quest' equazione si permutano tra loro le lettere A e B, non che le altre a, b, si avrà

$$R\cos B\operatorname{sen}C = R\cos b\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B\cos C\cos a.$$

E da queste due, colla eliminazione di cos b, si trae

$$R^2\cos A\operatorname{sen}C + R\cos B\operatorname{sen}C\cos C = \cos a\operatorname{sen}B\operatorname{sen}^2 C.$$

Dunque sarà in fine

$$\cos a = \frac{R^2\cos A + R\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C},$$

e sarà questa la cercata relazione tra A, B, C, a, ossia la quarta delle equazioni necessarie per la risoluzione de'triangoli sferici.

LXXXI. Quest' ultima equazione tra A, B, C, a, offre un' analogia evidente colla prima tra a, b, c, A; e possiamo rendere ragione di quest' analogia, mediante la proprietà dei triangoli sferici polari, o supplementarii. Si sa, in fatti, che il triangolo che ha gli angoli A, B, C, e i lati opposti a, b, c, corrisponde sempre ad un triangolo sferico polare, che ha i lati $200^\circ - A$, $200^\circ - B$, $200^\circ - C$, e gli angoli $200^\circ - a$, $200^\circ - b$, $200^\circ - c$. Or, applicando a quest'ultimo triangolo il principio dell' articolo LXXVI, si deduce l' equazione

$$\cos(200^\circ - a) = \frac{R^2\cos(200^\circ - A) - R\cos(200^\circ - B)\cos(200^\circ - C)}{\operatorname{sen}(200^\circ - B)\operatorname{sen}(200^\circ - C)},$$

che si riduce all'altra

$$\cos a = \frac{R^2\cos A + R\cos B\cos C}{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C},$$

trovata altrove, tenendo una via diversa.

Questa formola risolve immediatamente il caso in cui si voglia determinare un lato per mezzo de' tre angoli; ma per avere una formola più commoda pel calcolo logaritmico, si sostituirà il precedente valore di cos a nell' equazione.

$$1 - \frac{\cos a}{R} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{R^2}$$

il che darà

$$\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{R^2} = \frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C - \cos B\cos C - R\cos A}{2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C} = \frac{-R\cos(B+C) - R\cos A}{2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}$$

E come si ha in generale

$$R \cos p + R \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q),$$

la precedente equazione si riduce all'altra

$$\frac{\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} a}{R^2} = \frac{-\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) \cos \tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}$$

ove conviene osservare che il secondo membro, comunque sotto forma negativa, è non per tanto sempre positivo. Perchè si ha in generale

$$\text{sen}\,(x-100^\circ) = \frac{\text{sen}\, x \cos 100^\circ - \cos x \,\text{sen}\, 100^\circ}{R} = -\cos x,$$

e quindi

$$-\cos \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \text{sen}\left(\frac{A+B+C}{2} - 100^\circ\right);$$

quantità questa che è sempre positiva, perchè la somma $A+B+C$ essendo sempre compresa tra 200° e 600°, l'angolo

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C) - 100^\circ$$

è compreso tra zero e 200°; d'altronde $\cos \tfrac{1}{2}(B+C-A)$ è sempre positivo, poichè $B+C-A$ non può sorpassare 200°; in fatti nel triangolo polare il lato $200^\circ - A$ è minore della somma degli altri due $200^\circ - B$, $200^\circ - C$; dunque si ha $200^\circ - A < 400^\circ - B - C$, oppure $B + C - A < 200^\circ$.

Essendoci così assicurati che il risultamento sarà sempre positivo, si avrà, per determinare un lato per mezzo degli angoli, la formola

$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2} a = R \sqrt{\left\{\frac{-\cos \dfrac{A+B+C}{2} \cos \dfrac{B+C-A}{2}}{\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C}\right\}}.$$

LXXXII. Prima d'andare più oltre, osserveremo che da queste formole generali si possono dedurre quelle relative ai triangoli sferici rettangoli. A tal effetto si farà $= 100^\circ$, sì nelle quattro formole principali, come in quelle che ne derivano, permutando le lettere. E dapprima l'equazione

$$\cos A \,\text{sen}\, b \,\text{sen}\, c = R^2 \cos a - R \cos b \cos c,$$

darà, giusta l'indicata sostituzione

$$(1) \qquad R \cos a = \cos b \cos c.$$

Le derivate dall'equazione generale non contengono A, e quindi non danno alcuna relazione nuova nel caso di $A = 100^\circ$.

L' equazione

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b},$$

dà nel caso di $A = 100^\circ$

$$(2) \qquad \frac{R}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b};$$

E la derivata

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c},$$

darà egualmente

$$\frac{R}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c};$$

ma questa equazione è essa stessa una derivata dalla (2).

L'equazione

$$\cot A \text{ sen } C + \cos C \cos b = \cot a \text{ sen } b$$

dà, nel caso di $A = 100^\circ$,

$$\cos C \cos b = \cot a \text{ sen } b,$$

ovvero

$$(3) \qquad \cos C \text{ tang } a = \text{tang } b.$$

La derivata

$$\cot C \text{ sen } A + \cos A \cos b = \cot c \text{ sen } b$$

dà nella stessa ipotesi

$$R \cot C = \cot c \text{ sen } b,$$

ovvero

$$(4) \qquad R \text{ tang } c = \text{sen } b \text{ tang } C.$$

In fine la quarta equazione principale

$$\text{sen } B \text{ sen } C \cos a = R^2 \cos A + R \cos B \cos C,$$

e la sua derivata

$$\text{sen } A \text{ sen } C \cos b = R^2 \cos B + R \cos A \cos C,$$

danno nel caso di $A = 100^\circ$,

$$\text{sen } B \text{ sen } C \cos a = R \cos B \cos C, \text{ e sen } C \cos b = R \cos B,$$

o meglio

$$(5) \quad \cot B \cot C = R \cos a, \qquad (6) \text{ sen } C \cos b = R \cos B.$$

Le qui trovate sei equazioni son quelle sulle quali è fondata la risoluzione dei triangoli rettangoli sferici.

LXXXIII. Finiremo l'esposizione dei principi colla determinazione delle *analogie* di *Neper*, le quali servono a rendere molto più semplici diversi casi della risoluzione dei triangoli sferici.

Nel numero LXXX, mediante la combinazione dei valori di $\cos A$ e $\cos C$ espressi per mezzo di a, b, c, abbiamo ottenuto la equazione seguente

$$R \cos A \operatorname{sen} c = R \cos a \operatorname{sen} b - \cos C \operatorname{sen} a \cos b,$$

la quale dietro una semplice permutazione di lettere, ci dà l'altra

$$R \cos B \operatorname{sen} c = R \cos b \operatorname{sen} a - \cos C \operatorname{sen} b \cos a.$$

Addizionando ora queste due equazioni, e riducendo, emerge

$$(7) \qquad \operatorname{sen} c (\cos A + \cos B) = (R - \cos C) \operatorname{sen} (a+b);$$

e poichè

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B},$$

si avrà da queste equazioni

$$\operatorname{sen} c (\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B) = \operatorname{sen} C (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b),$$

e

$$\operatorname{sen} c (\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B) = \operatorname{sen} C (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b).$$

Dividendo dunque successivamente ciascuna di queste equazioni per la (7), si otterrà

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} = \frac{\operatorname{sen} C}{R - \cos C} \cdot \frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} (a+b)},$$

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\cos A + \cos B} = \frac{\operatorname{sen} C}{R - \cos C} \cdot \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} (a+b)}.$$

In fine riducendo queste formole per mezzo di quelle ottenute negli articoli XXIX e XXX, si avrà

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A+B) = \cot \tfrac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A-B) = \cot \tfrac{1}{2} C \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (a+b)}$$

Essendo dati dunque i due lati a e b coll'angolo compreso C, si troveranno gli altri due angoli A e B per mezzo delle analogie

$$\cos \tfrac{1}{2} (a+b) : \cos \tfrac{1}{2} (a-b) :: \cot \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A+B),$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a+b) : \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a-b) :: \cot \tfrac{1}{2} C : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A-B).$$

Se queste medesime formole si applicano al triangolo polare di ABC, converrà mettere rispettivamente $200^\circ - A$, $200^\circ - B$, $200^\circ - a$, $200^\circ - b$, $200^\circ - c$, in luogo di a, b, A, B, C, e si avranno per risultamento queste due analogie:

$$\cos \tfrac{1}{2}(A+B) : \cos \tfrac{1}{2}(A-B) :: \text{tang} \tfrac{1}{2} c : \text{tang} \tfrac{1}{2}(a+b),$$

$$\text{sen} \tfrac{1}{2}(A+B) : \text{sen} \tfrac{1}{2}(A-B) :: \text{tang} \tfrac{1}{2} c : \text{tang} \tfrac{1}{2}(a-b).$$

Queste quattro proporzioni sono conosciute col nome di *Analogie di Neper*.

Risoluzione dei triangoli sferici in generale.

La risoluzione dei triangoli sferici comprende sei casi generali, che andremo successivamente sviluppando.

CASO PRIMO.

LXXXIV. *Dati i tre lati* a, b, c, *trovare un angolo qualunque, per esempio* A.

Servirà all'uopo la formola

$$\text{sen} \tfrac{1}{2} A = R \sqrt{\left\{ \frac{\text{sen} \dfrac{a+b-c}{2} \ \text{sen} \dfrac{a+c-b}{2}}{\text{sen}\, b \ \text{sen}\, c} \right\}}$$

CASO SECONDO.

LXXXV. *Dati i due lati* a *e* b *coll'angolo* A *opposto ad uno di essi, trovare il terzo* c *e gli altri due angoli* B *e* C.

1° Si troverà l'angolo B mediante la formola

$$\text{sen}\, B = \frac{\text{sen}\, A \ \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a}.$$

2° Per avere l'angolo C converrà risolvere l'equazione

$$\cot A \ \text{sen}\, C + \cos C \cos b = \cot a \ \text{sen}\, b.$$

Perciò prendasi un angolo ausiliario φ in modo che si abbia

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\cos b \ \text{tang}\, A}{R}, \text{ ovvero } \cot A = \frac{\cos b \cos \varphi}{\text{sen}\, \varphi};$$

e sostituendo questo valore di $\cot A$ nella equazione precedente, si avrà

$$\frac{\cos b}{\text{sen}\, \varphi} (\cos \varphi \ \text{sen}\, C + \text{sen}\, \varphi \cos C) = \cot a \ \text{sen}\, b.$$

donde si deduce

$$\text{sen}\, (C+\varphi) = \frac{\text{tang}\, b \ \text{sen}\, \varphi}{\text{tang}\, a},$$

Si vede che con questo artifizio i due termini incogniti dell'equazione proposta, trovansi ridotti ad un solo; ed è facile così di ricavare il valore dell'angolo C.

3° Il lato c si troverà per mezzo dell'equazione

$$\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

E si può determinarlo anche direttamente, risolvendo l'equazione

$$R \cos b \cos c + \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c = R^2 \cos a.$$

Pongasi per ciò

$$\cos A \operatorname{sen} b = \frac{R \cos b \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}, \text{ ovvero } \operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos A \operatorname{tang} b}{R}.$$

e si avrà

$$\frac{\cos b}{\cos \varphi}(\cos c \cos \varphi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \varphi) = R \cos a.$$

Cercando dunque, prima l'angolo ausiliario φ, mediante l'equazione

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos A \operatorname{tang} b}{R},$$

si avrà poi il lato c per mezzo dell'equazione

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Questo secondo caso può avere due soluzioni, parimente che i casi analoghi de'triangoli rettilinei.

CASO TERZO.

LXXXVI. *Dati due lati* a *e* b *coll' angolo compreso* C, *trovare gli altri due angoli* A *e* B *e il terzo lato* c.

1.° Si troveranno i due angoli A e B per mezzo delle due equazioni seguenti

$$\cot A = \frac{\cot a \operatorname{sen} b - \cos C \cos b}{\operatorname{sen} C},$$

$$\cot B = \frac{\cot b \operatorname{sen} a - \cos C \cos a}{\operatorname{sen} C},$$

i secondi membri delle quali potrebbero essere ridotti ad un sol termine, per mezzo d'un angolo ausiliario; ma egli val meglio in simili circostanze servirsi delle analogie di *Neper*, le quali danno

$$\operatorname{tang} \frac{A-B}{2} = \cot \tfrac{1}{2} C \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang}\,\frac{A+B}{2}=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

2° Conoscendo gli angoli A e B, si potrà calcolare il terzo lato c per mezzo dell'equazione

$$\text{sen}\,c=\frac{\text{sen}\,a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A}.$$

Ma volendo determinare direttamente c, si potrà fare uso dell'equazione

$$R^2\cos c=\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\cos C+R\cos a\cos b.$$

Prendasi l'angolo ausiliario φ, in modo che sia

$$\text{sen}\,b\cos C=\cos b\,\text{tang}\,\varphi,\ \text{ovvero}\ \text{tang}\,\varphi=\frac{\cos C\,\text{tang}\,b}{R},$$

e si avrà

$$\cos c=\frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(a-\varphi).$$

CASO QUARTO.

LXXXVIII. *Dati due angoli* A *e* B *e il lato adiacente* c, *trovare gli altri due lati* a *e* b *ed il terzo angolo* C.

1° Si calcoleranno i due lati a e b col mezzo delle formole

$$\cot a=\frac{\cot A\,\text{sen}\,B+\cos B\cos c}{\text{sen}\,c},$$

$$\cot b=\frac{\cot B\,\text{sen}\,A+\cos A\cos c}{\text{sen}\,c}.$$

Ma si possono otteperli più facilmente ancora, facendo uso delle analogie di *Neper*, cioè:

$$\text{sen}\,\frac{A+B}{2}:\text{sen}\,\frac{A-B}{2}::\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c:\text{tang}\,\frac{a-b}{2},$$

$$\cos\frac{A+B}{2}:\cos\frac{A-B}{2}::\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c:\text{tang}\,\frac{a+b}{2}.$$

2.° Conosciuti che saranno i due lati a e b, si troverà C per mezzo dell'equazione $\text{sen}\,C=\dfrac{\text{sen}\,c\,\text{sen}\,A}{\text{sen}\,a}$; ma si può trovarlo anche direttamente in virtù dell'equazione

$$R^2\cos C=\cos c\,\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B-R\cos A\cos B.$$

Prendendo in fatti un angolo ausiliario φ, in modo che si abbia

$$\cos c\,\text{sen}\,B=\cos B\cot\varphi,\ \text{ovvero}\ \cot\varphi=\frac{\cos c\,\text{tang}\,B}{R},$$

si avrà

$$\cos C = \cos B \frac{\text{sen}(A-\varphi)}{\text{sen}\,\varphi}.$$

Questo caso e il precedente non dan luogo ad indeterminazione alcuna.

CASO QUINTO.

LXXXVIII. *Dati due angoli* A *e* B *e il lato* a *opposto ad uno di essi*, *trovare gli altri due lati* b e c, *e il terzo angolo* C.

1.° Si troverà il lato b per mezzo dell'equazione

$$\text{sen}\, b = \text{sen}\, a \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, A}.$$

2.° Per trovare il lato c bisognerà far capo dell'equazione

$$\cot a \,\text{sen}\, c - \cos B \cos c = \cot A \,\text{sen}\, B,$$

che per renderla più semplice si farà

$$\cot a = \cos B \frac{\cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi}, \text{ ovvero } \tan\varphi = \frac{\cos B \tan a}{R},$$

e si avrà così

$$\frac{\cos B}{\text{sen}\,\varphi}(\text{sen}\, c \cos\varphi - \cos c \,\text{sen}\,\varphi) = \cot A \,\text{sen}\, B;$$

e quindi

$$\text{sen}(c-\varphi) = \frac{\tan B \,\text{sen}\,\varphi}{\tan A}.$$

3.° Si troverà l'angolo C, risolvendo l'equazione

$$\cos a \,\text{sen}\, B \,\text{sen}\, C - R \cos B \cos C = R^2 \cos A.$$

Pongasi perciò

$$\cos a \,\text{sen}\, B = \frac{R \cos B \cos\varphi}{\text{sen}\,\varphi}, \text{ ovvero } \cot\varphi = \frac{\cos a \tan B}{R},$$

e si avrà

$$\frac{\cos B}{\text{sen}\,\varphi}(\text{sen}\, C \cos\varphi - \cos C \,\text{sen}\,\varphi) = R \cos A;$$

e quindi

$$\text{sen}(C-\varphi) = \frac{\cos A \,\text{sen}\,\varphi}{\cos B}.$$

Questo quinto caso è, come il secondo, suscettibile di due soluzioni; parimente che avviene nel caso analogo dei triangoli rettilinei.

CASO SESTO.

LXXXIX. *Dati i tre angoli* A, B, C, *trovare i tre lati* a, b, c. Serviranno a quest'oggetto le formole

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ a = R\sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen}\ B\ \text{sen}\ C}},$$

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ b = R\sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen}\ A\ \text{sen}\ C}},$$

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ c = R\sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\text{sen}\ A\ \text{sen}\ B}}.$$

Si può osservare che di questi sei casi generali i tre ultimi potrebbero dedursi dai tre primi, giusta la proprietà dei triangoli polari: di maniera che non v' ha propriamente se non se tre casi differenti nella risoluzione generale dei triangoli sferici. Il primo caso si risolve, come i triangoli rettangoli, per via d'una sola analogia; il terzo si risolve in modo, quasi, anche semplice, per mezzo delle analogie di *Neper*. Quanto al secondo conviene adoperare due analogie; e d'altronde esso ammette, in alcuni casi, due soluzioni, mentre che il primo e il terzo ammettono sempre una soluzione sola.

XC. Per distinguere ora per quali valori particolari dati di A, a, b, vi siano nel secondo caso due triangoli che soddisfacciano alla quistione, e quando ve ne sia uno, supporremo dapprima l'angolo $A < 100°$: si prolunghino i due lati AC, AB (*fig.* 16) sino a che s' incontrino nuovamente in A'. Se si prende l'arco AC < 100°, e si abbassa CD perpendicolarmente su AB, ciascuno de' lati AD, CD del triangolo rettangolo ACD sarà minore di 100°; la linea CD sarà la più corta distanza dal punto C all' arco AB; e, prendendo DB' = DB, le oblique CB', CB saranno eguali, e tanto più grandi per quanto più disteranno dalla perpendicolare. Sia AC = b, CB = a, e si vede così che in un triangolo sferico, in cui si abbia $A < 100°$, $b < 100°$, ed $a < b$, v' à necessariamente due soluzioni ACB, ACB'; ma se, supponendo sempre A e b minori ciascuno di 100°, si abbia $a > b$, allora il punto B' passerà al di là del punto A, e non vi sarà se non una soluzione rappresentata da ABC.

Sia inoltre AC' > 100°; si abbassi la perpendicolare C'D' sopra ABA', e si avrà C'D' < A'C', e l'arco C'B''', menato tra D' ed A', sarà > C'D' e < C'A'; dunque se facciasi AC' = b, C'B'' = C'B''' = a, si vede che la supposizione di $A < 100°$ e $b > 100°$ darà due soluzioni, se $a + b < 200°$, e una sola quando si abbia $a + b > 200°$;

imperciocchè allora il punto B''' passerà al di là di A'. Discutendo allo stesso modo il caso in cui l'angolo A è $> 100^\circ$, si potranno stabilire così i *sintomi* che determinano se, nel caso II, la quistione ammetta due soluzioni o una soltanto, come qui appresso si vede

se $A < 100^\circ$, $b < 100^\circ$ $\begin{cases} a > b & \text{vi sarà una soluzione,} \\ a < b & \text{vi saranno due soluzioni;} \end{cases}$

se $A < 100^\circ$, $b > 100^\circ$ $\begin{cases} a+b > 200^\circ & \text{vi sarà una soluzione,} \\ a+b < 200^\circ & \text{vi saranno due soluzioni;} \end{cases}$

se $A > 100^\circ$, $b < 100^\circ$ $\begin{cases} a+b > 200^\circ & \text{vi saranno due soluzioni;} \\ a+b < 200^\circ & \text{vi sarà una soluzione;} \end{cases}$

se $A > 100^\circ$, $b > 100^\circ$ $\begin{cases} a > b & \text{vi saranno due soluzioni,} \\ a < b & \text{vi sarà una soluzione.} \end{cases}$

Vi sarà una soluzione sola se $A=100^\circ$, sia che $a=b$, sia che $a+b=200$. E ve ne saran due se sia $b=100^\circ$.

XCI. Questi stessi risultamenti possono essere applicati al caso quinto, per via del triangolo polare, e se ne dedurranno i *sintomi* seguenti, i quali faran conoscere se per valori dati di A, B, a vi siano due triangoli che soddisfacciano alla quistione, o pure ve ne sia uno soltanto. Così

se $a > 100^\circ$, $B > 100^\circ$ $\begin{cases} A < B & \text{vi sarà una soluzione,} \\ A > B & \text{vi saranno due soluzioni;} \end{cases}$

se $a > 100^\circ$, $B < 100^\circ$ $\begin{cases} A+B < 200^\circ & \text{vi sarà una soluzione,} \\ A+B > 200^\circ & \text{vi saranno due soluzioni;} \end{cases}$

se $a < 100^\circ$, $B > 100^\circ$ $\begin{cases} A+B < 200^\circ & \text{vi saranno due soluzioni,} \\ A+B > 200^\circ & \text{vi sarà una soluzione;} \end{cases}$

se $a < 100^\circ$, $B < 100^\circ$ $\begin{cases} A < B & \text{vi saranno due soluzioni,} \\ A > B & \text{vi sarà una soluzione.} \end{cases}$

Vi sarà una sola soluzione se ha luogo una delle eguaglianze seguenti $a = 100^\circ$, $A=B$, $A+B=200^\circ$. Ve ne saran due quando $B=100^\circ$.

XCII. In qualunque caso, per separare le soluzioni inutili e false, convien ricordarsi, 1.° che ogni angolo ed ogni lato dev'esser minore di 200°; 2.° che gli angoli maggiori sono quelli che si oppongono ai lati maggiori, e viceversa; di modo che se si ha $A > B$, dev' esser pure $a > b$ (*).

(*) Chi desiderasse maggiori sviluppi intorno ai casi di una soluzione doppia, riportati dall'Autore, e chiamati casi dubbi, potrà consultare l'eccellente *Trattato di Trigonometria* del Professore Amaute, ove trovansi, dietro una fina analisi, enumerati non solo i casi portati nel testo, ma anche non osservati prima di lui da alcun' altro Autore; cosicchè il prelodato Professore ha ormai completata l' analisi de' casi dubbi della trigonometria sferica.

Esempii della risoluzione dei triangoli sferici.

XCIII. *Esempio* I. Sieno O, M, N (*fig.* 15) tre punti situati in un piano inclinato all' orizzonte; se da questi tre punti si abbassano le perpendicolari OD, Mm, Nn sul piano orizzontale DEF, gli oggetti posti in O, M, N saran rappresentati sul piano orizzontale dalle loro *projezioni* D, m, n e l'angolo MON da mDn. Posto ciò, essendo dati l'angolo MON, e le inclinazioni dei suoi due lati OM, ON sulla verticale OD, trattasi di trovare *l' angolo di projezione* mDn.

Dal punto O, come centro, e con un raggio $=1$, descrivasi una superficie sferica che incontri in A, B, C i lati OM, ON e la verticale OD; si avrà così un triangolo sferico, i cui tre lati son conosciuti; si potrà dunque determinare l' angolo C uguale ad mDn, per mezzo della formola del caso primo.

Sia per esempio l' angolo $MON = AB = 64^\circ\ 44'\ 60''$; l' angolo $DOM = AC = 98^\circ\ 12'$, e l angolo $DON = BC = 105^\circ\ 42'$, e si avrà per la formola citata

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} C = R^2 \frac{\text{sen}\ 28^\circ\ 57'\ 30''\ \text{sen}\ 35^\circ\ 87'\ 30''}{\text{sen}\ 98^\circ\ 12'\ \ \text{sen}\ 105^\circ\ 42'},$$

e si calcolerà il valore di questa formola come qui appresso si vede:

L. sen 28° 57′ 30″...	9,6373956	L. sen 98° 12′.....	9,9998106
L. sen 35° 87′ 30″...	9,7276562	L. sen 105° 42′......	9,9984242
somma + 2 L.R...	39,3650518		19,9982348
	19,9982348		
2 L sen $\frac{1}{2}$ C..........	19,3668170		
L. sen $\frac{1}{2}$ C..........	9,6834085	$\frac{1}{2}$ C = 32° 4′ 70″, 5	
		C = 64° 9′ 41″.	

Dunque l' angolo di 64° 44′ 90″, misurato in un piano inclinato all' orizzonte, come nel caso attuale, si riduce a 64° 9′ 41″ in projezione orizzontale.

Questo problema è utile nell' arte di rilevar le piante topografiche, quando i punti che voglionsi determinare sono situati ad altezze sensibilmente differenti al di sopra dello stesso piano orizzontale.

XCIV. *Esempio* II. Conoscendo le latitudini di due punti del globo, e la loro differenza di longitudine, trovarne la più corta distanza.

S'immaginerà un triangolo sferico ACB (*fig.* 14) formato col polo boreale C, e coi due luoghi conosciuti A e B; in questo triangolo si conoscerà l' angolo al polo ACB, che è la differenza in longitudine dei due punti A e B, e i due lati compresi AC, CB, che sono i complementi di latitudine dei punti A e B. Si determinerà dunque il terzo lato AB, per mezzo della formola del caso III.

Sieno, per esempio, A l'osservatorio di Parigi, e B quello di Pekin; la latitudine boreale del primo di questi luoghi è di 54° 26′ 36″, quella dell'altro è di 44° 33′ 73″, e la loro differenza in longitudine è di 126° 80′ 56″. Si avrà dunque

$$a = 45° \, 73' \, 64'', \quad b = 55° \, 66' \, 27', \quad C = 126° \, 80' \, 56'',$$

e le formole che servono a determinare c saranno

$$\text{tang } \varphi = \frac{\cos C \text{ tang } b}{R}, \quad \cos c = \frac{\cos b \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Con i dati precedenti e con queste formole si stabilirà il calcolo seguente:

L. cos C...	9,6114352
L. tang b...	10,0776707
L. tang φ...	9,6891059.

L'angolo φ che danno le tavole per mezzo di questo logaritmo-tangente è di 28° 94′ 23″. Ma devesi osservare che cos C è negativo, e quindi anche tan φ, sicchè devesi prendere $\varphi = -28° \, 94' \, 23''$, il che darà $a - \varphi = 74° \, 67' \, 87''$. Posto ciò, ed osservando che $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$, si terminerà il calcolo, come segue

L. cos $(a - \varphi)$...	9,5880938
L. cos b..........	9,8071953
	19,3952891
L. cos φ..........	9,9554823
L. cos c..........	9,4418068.

Dunque la distanza cercata $c = 82° \, 16' \, 05''$. Questa distanza espressa in miriametri è 821mir, 605; perchè un miriametro è la lunghezza d'un arco di dieci minuti, ed un metro è quella d'un arco d'un decimo di secondo.

XCV. *Esempio* III. Per dare un esempio del caso quinto, proponiamoci di risolvere il triangolo sferico nel quale si conoscono i due angoli $A = 78° \, 50'$, $B = 54° \, 0'$, e il lato $a = 99° \, 20' \, 17''$, opposto ad uno di essi. Dal valore di questi dati si conoscerà, per mezzo dello specchietto dell'art. XCI, che il problema ammette una sola soluzione, perocchè si ha ad un tempo $a < 100$, $B < 100$, ed $A > B$. Ecco il calcolo di questa soluzione.

1.° Si troverà il lato b mediante la formola $\text{sen } b = \text{sen } a \dfrac{\text{sen } B}{\text{sen } A}$,

donde

L. sen a.......	9,9999659
L. sen B.......	9,8751256
10 — L. sen A.......	0,0252525
L. sen b........	9,9003440;

da cui deducesi $b = 58^\circ\, 99'\, 14''$, oppure prendendo il supplemento, $b = 141^\circ\, 49'\, 86''$; ma siccome l'angolo $B < A$, bisogna che fosse pure $b < a$, e così il primo valore di b è il solo che possa aver luogo.

2.° Per avere il lato c si farà uso delle formole

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos B \operatorname{tang} a}{R}, \quad \operatorname{sen}(c-\varphi) = \frac{\operatorname{tang} B \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{tang} A} = \frac{\operatorname{tang} B \cot A \operatorname{sen}\varphi}{R^2}$$

e quindi si stabilirà il calcolo seguente:

L. cos B...........	9,8204063	L. sen φ............	9,9999220
L. tang a — L. R.	1,9016731	L. tang B — L. R.	0,0547193
L. tang φ..........	11,7220794	L. cot A...........	9,5455236
	$\varphi = 98^\circ\, 79'\, 28'', 8$	L. sen $(c-\varphi)$......	9,6001649
			$c-\varphi = 26^\circ\, 7'\, 70'', 5.$

Potrebbesi anche qui prendere il supplemento di $c-\varphi$ che è $173^\circ\, 92'\, 29'', 5$, oltre il suo valore precedente $26^\circ\, 7'\, 70'', 5$; ma prendendo il supplemento, si avrebbe $c > 200^\circ$; ed è perciò che convien ritenere il valore $26^\circ\, 7'\, 70'', 5$, con che si avrà $c = 124^\circ\, 81'\, 99'', 3$.

3.° In fine per calcolare direttamente l'angolo C, prenderemo le formole

$$\cot\Psi = \frac{\cos a \operatorname{tang} B}{R}, \quad \operatorname{sen}(C-\Psi) = \frac{\cos A \operatorname{sen}\Psi}{\cos B}.$$

Quindi si passerà al seguente calcolo numerico:

L. cos a...........	8,0982928	L. sen Ψ..........	9,9999563
L. tang B—L. R.	0,0547193	L. cos A..........	0,5202711
L. cot Ψ...........	8,1530121	L. R — L. cos B..	0,1795937
	$\Psi = 99^\circ\, 9'\, 45', 5$	L. sen $(C-\Psi)$...	9,6998211
			$C-\Psi = 33^\circ\, 40'\, 54'', 5$
			$\Psi = 99^\circ\, 9'\, 45'', 5$
			$C = 132^\circ\, 50'\, 0'', 0$

Non si è potuto prendere per $C-\Psi$ il supplemento di $33^\circ\, 40'\, 54'',5$, altrimenti si sarebbe avuto per C un valore maggiore di 200°. Vedesi dunque come in effetti il problema è suscettibile di una sola soluzione.

Nota. Facendo uso dell' antica divisione del cerchio pel calcolo di questi esempii, gli angoli dati o calcolati saranno espressi come segue.

Esempio I. Angoli dati: MON $= 50^\circ\, 0'\, 8''$ DOM $= 88^\circ\, 18'\, 28'', 8$,

DON $= 94^\circ\, 52'\, 40'', 8$. Angolo calcolato: $C = 57^\circ\, 41', 4'', 9$.

Esempio II. Angoli e lati dati: $a = 41^\circ\, 9'\, 46''$, $b - 50^\circ\, 5'\, 47$, $C = 114^\circ\, 7'\, 30''$. Lato calcolato; $c = 73^\circ\, 46'\, 40''$.

Esempio III. Angoli e lati dati: $A = 70^\circ\, 39'$, $B = 48^\circ\, 36'$, $a = 89^\circ\, 16'\, 53'', 5$. Angoli e lati calcolati: $b = 52^\circ\, 39'\, 4''\, 5$. $c = 112^\circ\, 20'\, 16'', 6$, $C = 119^\circ\, 15'\, 0''$.

Nota del Traduttore

al caso terzo della Trigonometria rettilinea pag. 38.

Per accomodare la formola $c=\sqrt{a^2+b^2-\frac{2\,ab\cos C}{R}}$ al calcolo logaritmico, si ponga

$$a\cos C=m\,, \tag{1}$$

essendo m una quantità il cui valore vien dato da questa relazione, ove le quantità a e C son date. Facciasi dippiù $R=1$, e verrà

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2\,bm.}$$

Ma la (1) dà $a=\frac{m}{\cos C}$, dunque sarà

$$c=\sqrt{\frac{m^2}{\cos^2 C}+b^2-2bm,}$$

ovvero, osservando che $\frac{1}{\cos^2 C}=\sec^2 C=1+\operatorname{tang}^2 C$, avrassi

$$c=\sqrt{m^2+b^2-2\,bm+m^2\operatorname{tang}^2 C}=\sqrt{(m-b)^2+m^2\operatorname{tang}^2 C} \tag{2}$$

Posto ciò, si prenda la relazione (XLIV)

$$\frac{b}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

e riflettendo che $\operatorname{sen} B=\operatorname{sen}(200^o-(A+C)=\operatorname{sen}(A+C)$, si avrà

$$\frac{b}{a}=\frac{\operatorname{sen}(A+C)}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} A\cos C+\operatorname{sen} C\cos A}{\operatorname{sen} A}=\cos C+\operatorname{sen} C\cot A,$$

e quindi

$$\cos C=\frac{b}{a}-\operatorname{sen} C\cot A\,,$$

ed in fine verrà

$$\cot A=\frac{b-a\cos C}{a\operatorname{sen} C}.$$

Ma dalla relazione (1) si ha $a\operatorname{sen} C=m\operatorname{tang} C$, dunque

$$\cot A=\frac{b-m}{m\operatorname{tang} C};\ \operatorname{tang} A=\frac{m\operatorname{tang} C}{b-m} \tag{3}$$

$$m\operatorname{tang} C=(b-m)\operatorname{tang} A.$$

Sostituendo dunque questo valore nella (2) si avrà

$$c=\sqrt{(m-b^2)\,(1+\operatorname{tang}^2 A)}=(m-b)\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 A}=(m-b)\sec A$$

ed in fine

$$c=\frac{m-b}{\cos A}. \tag{4}$$

Formola semplicissima per calcolare c, dopo che si sarà calcolato m colla (1). Si osservi pure che le relazioni (3) potran servire a dare anche con facilità l'angolo A; e come osserva il ch. Prof. Amante nel citato *Trattato di Trigonometria*, le formole (3) e (4) son pregevoli, perchè utili nel caso in cui l'angolo compreso è grandissimo, e quasi uguale a due retti, o pure quando uno dei lati è piccolissimo rispetto all'altro.

APPENDICE

CONTENENTE LA RISOLUZIONE DI DIVERSI CASI PARTICOLARI DELLA TRIGONOMETRIA

XCLI. La risoluzione dei triangoli, esposta negli articoli precedenti, non lascia nulla a desiderare dal lato della generalità. V'ha non pertanto talune circostanze, ove si possono, con vantaggio, sostituire alle soluzioni generali le particolari, sia per abbreviare i calcoli, sia per renderne i risultamenti più esatti e più indipendenti dall'errore delle tavole. Andremo a risolvere taluni di questi casi particolari, scegliendo quelli che sono d'un uso più frequente, o che conducono alle formole più osservabili.

Continuando a dinotare con A, B, C, gli angoli del triangolo proposto, rettilineo o sferico, e con a, b, c, i lati rispettivamente opposti, supporremo dippiù il raggio delle tavole uguale al 1, il che non altera affatto la generalità de' risultamenti. Gli angoli A, B, C, sono espressi nel calcolo, sia con i gradi, sia colle lunghezze assolute degli archi che servono loro di misura, essendo questi archi presi nel cerchio il cui raggio è 1. Quando un angolo o un arco x è piccolissimo si potranno sostituire a sen x e cos x, i loro valori in serie, cioè:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ec.}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \text{ec.};$$

in tal caso però l'arco x dev' esser espresso in parti del raggio. Allorchè un arco è stato trovato in parti del raggio, se lo si vuole esprimere in minuti, bisognerà moltiplicarlo pel numero de' minuti contenuti nel raggio; questo numero è $\frac{20000}{\pi} =$ 6366,1977237, e il suo logaritmo $=$ 3,80388012297.

§ I. *Dei triangoli rettilinei che hanno due lati piccolissimi.*

XCVII. Supponiamo che gli angoli A e B sieno piccolissimi, e in conseguenza C ottusissimo; potrà farsi allora

$$\text{sen } A = A - \tfrac{1}{6} A^3, \ \text{sen } B = B - \tfrac{1}{6} B^3$$

$$\text{e sen } C = \text{sen } (A+B) = A+B - \tfrac{1}{6} (A+B)^3.$$

Se dunque si conosca il lato c e gli angoli adiacenti A, B, si troveranno gli altri lati per mezzo delle formole

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } (A+B)}, \ b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } (A+B)},$$

le quali colla sostituzione dei valori precedenti divengono, dietro riduzioni,

$$a = \frac{cA}{A+B}\left(1 + \frac{2AB+B^2}{6}\right),$$

$$b = \frac{cB}{A+B}\left(1 + \frac{A^2+2AB}{6}\right),$$

e danno il risultamento seguente

$$a + b - c = \tfrac{1}{2}\, c\, AB.$$

Questi valori sono esatti, sino a quei termini che contengono fino a quattro dimensioni in A e B

XCVIII. Supponiamo in secondo luogo che sien dati i due lati a e b coll' angolo compreso $C = \pi - \theta$, essendo θ un angolo piccolissimo. Si avrà dapprima

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = a^2 + b^2 + 2ab\,(1 - \tfrac{1}{2}\theta^2) = (a+b)^2 - ab\,\theta^2,$$

e quindi

$$c = a + b - \tfrac{1}{2}\frac{ab\,\theta^2}{a+b}.$$

Si troverà in seguito l'angolo A. per mezzo dell'equazione

$$\text{sen}\, A = \frac{a}{c}\,\text{sen}\, C = \frac{a}{c}\,\text{sen}\,\theta,$$

donde col sostituire a c ed a sen θ i loro valori si deduce

$$\text{sen}\, A = \frac{a}{a+b}\left(\theta + \tfrac{1}{2}\frac{ab}{(a+b)^2}\theta^3 - \tfrac{1}{6}\theta^3\right) = \frac{a\theta}{a+b}\left(1 + \frac{ab - a^2 - b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{\theta^2}{6}\right).$$

Quindi $\quad A = \text{sen}\, A + \tfrac{1}{6}\,\text{sen}^3 A = \dfrac{a\theta}{a+b} + \dfrac{ab\,(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{\theta^3}{6}.$

Da questa formola si può dedurre quella relativa a B, permutando tra loro le lettere a e b; ma si osserverà che quando A è cognito si può avere immediatamente $B = \theta - A$. Se θ è dato in minuti, allora, per avere A espresso pure in minuti, bisognerà nelle formole precedenti, sostituire in luogo di A e di θ, i rapporti $\dfrac{A}{R}$, $\dfrac{\theta}{R}$, ove R indica il numero dei minuti contenuti nel raggio; in tal modo si avrà

$$c = a + b - \frac{\tfrac{1}{2}ab}{a+b}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2$$

$$A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 + \frac{b\,(a-b)}{6\,(a+b)^2}\left(\frac{\theta}{R}\right)^2\right].$$

XCIX. Per dare un esempio di queste formole, sia $a = 1000^{m\cdot}$, $b = 2400^{m\cdot}$, $C = 199°32'$, e quindi $\theta = 68'$. Si avrà così

$$a + b - c = \frac{1200000}{3400}\left(\frac{68}{R}\right)^2 = 0{,}037806,$$

donde $c = 3399^{m},962194$.

In seguito si ha per una prima approssimazione

$$A=\frac{a\,\theta}{a+b}=20' \text{ e } B=\theta-A=48;$$

e dalla formola intera si deduce

$$A=20'\left[1-\frac{2400\times1400}{6\,(3400)^2}\left(\frac{68}{R}\right)^2\right]=19,99988946,$$

e quindi $B=48',00011054$; valori questi che devono essere esatti sino all'ultima cifra decimale.

§ II. *Risoluzione del terzo caso dei triangoli rettilinei per mezzo delle serie.*

C. Dati i due lati a e b e l'angolo compreso C, si sa che si trova l'angolo B colla proporzione $b : a :: \text{sen } B : \text{sen } (B+C)$, la quale dà

$$a \text{ sen } B = b \, (\text{sen } B \cos C + \cos B \text{ sen } C),$$

ed in conseguenza

$$\frac{\text{sen } B}{\cos B}=\frac{b \text{ sen } C}{a-b\cos C}.$$

Se in questa equazione si pongano in luogo dei seni e coseni i loro valori in esponenziali immaginarii (XXXV), si avrà

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}}-e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}}+e^{-B\sqrt{-1}}}=\frac{b\,(e^{C\sqrt{-1}}-e^{-C\sqrt{-1}})}{2a-b\,(e^{C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}})};$$

donde si deduce

$$e^{2B\sqrt{-1}}=\frac{a-b\,e^{-C\sqrt{-1}}}{a-b\,e^{C\sqrt{-1}}}.$$

Prendendo ora i logaritmi di ciascun membro, e sviluppando in serie il secondo membro in virtù della formola conosciuta

$$\text{l. } (a-x)=\text{l. } a-\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{3a^3}-\text{ ec.},$$

si avrà

$$2B\sqrt{-1}=\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}+\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}+\text{ec.}$$
$$-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\text{ec.}$$

Dividendo dunque per $2\sqrt{-1}$, ed osservando che

$$e^{mC\sqrt{-1}}-e^{-mC\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\text{ sen } mC,$$

si avrà

$$B=\frac{b}{a}\text{ sen } C+\frac{b^2}{2a^2}\text{ sen } 2C+\frac{b^3}{3a^3}\text{ sen } 3C+\frac{b^4}{4a^4}\text{ sen } 4C+\text{ec.}$$

E questo il valore dell' angolo B espresso in parti del raggio, esprimente una serie la cui legge è semplicissima, e la quale sarà tanto più convergente per quanto più piccolo sarà b rispetto ad a.

Il valore trovato deve soddisfare pure all'equazione

$$\tan\left(B+\tfrac{1}{2}C\right)=\frac{a+b}{a-b}\tan\tfrac{1}{2}C,$$

che è la stessa che l'altra

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

e che non differisce, se non se per la forma, dall'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}=\frac{b \operatorname{sen} B}{a-b\cos C}.$$

CI. Essendo conosciuto l'angolo B, si avrà il terzo angolo $A=200^\circ-B-C$. Il terzo lato c poi dipende dall'equazione

$$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos C,$$

la quale dà estraendo la radice

$$c=a-b\cos C+\frac{b^2}{2a}\operatorname{sen}^2 C+\frac{b^3}{2a^2}\operatorname{sen}^2 C\cos C-\text{ec.}$$

Ma questa serie non procede regolarmente, e non può essere continuata a piacimento. Al contrario si può trovare una serie semplicissima pel logaritmo iperbolico di c. In fatto egli è facile vedere che sia

$$a^2-2\,ab\cos C+b^2=(a-be^{C\sqrt{-1}})\,(a-be^{-C\sqrt{-1}});$$

perocchè il prodotto di questi due fattori sviluppato dà

$$a^2-ab\,(e^{C\sqrt{-1}}+e^{-C\sqrt{-1}})+b^2,\ \text{ovvero}\ a^2-2\,ab\cos C+b^2,$$

Si avrà dunque

$$c^2=(a-be^{C\sqrt{-1}})\,(a-be^{-C\sqrt{-1}});$$

e prendendo i logaritmi d'ambi i membri, verrà

$$2\mathrm{L}\,c=\mathrm{L}\,a-\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}-\text{ec.}$$

$$+\mathrm{L}\,a-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\text{ec.}$$

Dunque tornando a ridurre, in virtù della formola

$$e^{mC\sqrt{-1}}+e^{-mC\sqrt{-1}}=2\cos mC,$$

si avrà la serie

$$\mathrm{L}\,c=\mathrm{L}\,a-\frac{b}{a}\cos C-\frac{b^2}{2a^2}\cos 2C-\frac{b^3}{3a^3}\cos 3C-\text{ec.},$$

la quale non è meno elegante di quella che dà il valore di B. Volendo che i logaritmi fossero quelli delle tavole ordinarie, converrà moltiplicare i termini algebrici pel modulo 0,43429449.

§. III. *Risoluzione del terzo caso dei triangoli sferici per via delle serie.*

CII. Si è veduto nel paragrafo precedente che il valore di x ricavato dall'equazione $\text{tang}\,x = \frac{m+n}{m-n}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}C$, può esprimersi con questa serie

$$= x\ \frac{1}{2}C + \frac{n}{m}\,\text{sen}\,C + \frac{n^2}{2m^2}\,\text{sen}\,2C + \frac{n^3}{3m^3}\,\text{sen}\,3C + \text{ec.}$$

Or in un triangolo sferico in cui si conoscono i due lati a e b e l'angolo compreso C, si ha per le analogie di *Neper* (LXXXVI)

$$\cot\frac{A-B}{2} = \frac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\text{sen}\,(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}C =$$

$$\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \text{sen}\,\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a}{\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \text{sen}\,\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}C;$$

$$\cot\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\,(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}{\cos\,(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}C =$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \text{sen}\,\frac{1}{2}a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}b}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}C.$$

Dunque in virtù della formola precedente, e supponendo sempre $b<a$, si avrà

$$\frac{A-B}{2} = 100^\circ - \frac{1}{2}C - \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b}{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,C - \frac{\text{tang}^2\,\frac{1}{2}b}{2\,\text{tang}^2\,\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,2C$$

$$- \frac{\text{tang}^3\,\frac{1}{2}b}{\text{tang}^3\,\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,3C - \text{ec.}$$

$$\frac{A+B}{2} = 100^\circ - \frac{1}{2}C + \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,C - \frac{\text{tang}^2\,\frac{1}{2}b}{2\cot^2\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,2C$$

$$+ \frac{\text{tang}^3\,\frac{1}{2}b}{3\cot^3\frac{1}{2}a}\,\text{sen}\,3C - \text{ec.}$$

Queste serie, la cui legge è semplicissima, saran tanto più convergenti per quanto più piccolo sarà il valore di b. La prima è sempre convergente, perchè si suppone $b<a$; la seconda lo sarà pure, se sia $\text{tang}\,\frac{1}{2}b < \cot\frac{1}{2}a$, ovvero $a+b<200^\circ$. Essa sarebbe divergente e falsa se si avesse $a+b>200^\circ$; per altro questo caso può evitarsi, perchè la risoluzione del triangolo BCA (*fig.* 11) nel quale si avesse $CA+CB>200^\circ$, si riduce sempre a quella del triangolo $A'CB'$, nel quale $C'A+CB' < 200^\circ$. Del resto

la serie seconda è nella sua massima convergenza, quando a e b son tutti e due piccolissimi; allora il terzo lato c è esso pure piccolissimo, poichè debbesi avere $c<a+b$, ed il triangolo sferico differisce pochissimo da un triangolo piano; in questo caso l'eccesso della somma dei tre angoli piani sopra due angoli retti esprimesi così:

$$A+B+C-200^\circ=$$

$$\frac{2}{1}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}b\ \operatorname{sen}C-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\ \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b\ \operatorname{sen}2C$$
$$+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}a\ \operatorname{tang}^3\frac{1}{2}b\ \operatorname{sen}3C-\text{ec.}$$

CIII. Per trovare il terzo lato c del triangolo proposto si ha l'equazione

$$\cos c=\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b\cos C,$$

dalla quale è facile dedurre le altre due qui appresso:

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c=$$
$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C+\cos^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b,$$
$$\cos^2\frac{1}{2}c=$$
$$\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b\cos C+\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b.$$

Dalla forma di questi valori si vede che $\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$ può essere riguardato come il terzo lato d'un triangolo rettilineo, di cui gli altri due lati cogniti fossero $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b$, e l'angolo tra essi compreso fosse C: parimente $\cos\frac{1}{2}c$ è il terzo lato di un triangolo rettilineo, di cui due lati fossero $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}b$, e l'angolo compreso tra questi lati fosse $200^\circ-C$. Si avrà dunque per la formola trovata pe' triangoli rettilinei

$$\log\operatorname{sen}\frac{1}{2}c=\log\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right)-$$
$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}\cos C-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a}\cos 2C-\text{ec.},$$

$$\log\cos\frac{1}{2}c=\log\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right)+$$
$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\cos C-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\cot^2\frac{1}{2}b}\cos 2C+\text{ec.}$$

Rimane inoltre ad osservarsi che siccome ciascuno dei triangoli rettilinei, dei quali è parola, può risolversi per mezzo di un triangolo rettilineo rettangolo, così si può direttamente ridurre la risoluzione del triangolo sferico proposto a quella d'un triangolo rettangolo.

Con questo mezzo si trova che $\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$ è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, i cui cateti sono $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$. Similmente $\cos\frac{1}{2}$ o è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, i cui cateti sono $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$, e $\cos\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}C$.

Di più se si chiami M l'angolo che nel primo triangolo è opposto al lato $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$; e nel secondo si chiami N l'angolo opposto al lato $\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C$, risulterà per le analogie di *Neper* che $\frac{A-B}{2}=M$, e $\frac{A+B}{2}=N$, oppure $200^\circ-N$, cioè $\frac{A+B}{2}=N$, se $a+b<200^\circ$, ed $\frac{A+B}{2}=200^\circ-N$, se $a+b>200^\circ$. Dunque in ogni triangolo sferico, in cui si conoscono due lati a e b e l'angolo compreso C, si può trovare direttamente ciascuna delle quantità $\frac{1}{2}c$, $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$, mediante la risoluzione d'un triangolo rettilineo rettangolo, ove si conoscono i due cateti e l'angolo retto.

Risulta pure da ciò che, dopo aver trovato l'angolo M ossia $\frac{A-B}{2}$ per mezzo della formola

$$\operatorname{tang} M=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C,$$

si può calcolare il terzo lato per mezzo della formola

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}c=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\operatorname{sen}M}=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}{\cos M}$$

N. B. Le formole trovate in questo paragrafo s'applicheranno facilmente alla risoluzione del quinto caso dei triangoli sferici, poichè questo si può riportare al terzo, per la nota proprietà dei triangoli polari.

§ IV. *Risoluzione d'un triangolo sferico, due lati del quale sono poco differenti da 100°.*

CIV. Sieno a e b i due lati differenti di poco da 100°, e sia proposto di determinare l'angolo C, per mezzo di tre lati a, b, c.

Se i lati a e b fossero esattamente eguali a 100°, sarebbe $C=c$; quindi se a e b differiscono pochissimo da 100°, l'angolo C avrà per misura un arco pochissimo differente da c. Sia $a=100^\circ+\alpha$, $b=100^\circ+\beta$, $C=c+x$; si sostituiscano questi valori nell'equazione

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b},$$

e si avrà

$$\cos(c+x)=\frac{\cos c-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Ma poichè le quantità α e β si son supposte piccolissime, si potrà fare

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\alpha\beta,\ \cos\alpha\cos\beta=1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2},$$

disprezzando i termini in cui α e β si elevano al quarto grado; e così si otterrà

$$\cos(c+x)\frac{\cos c-\alpha\beta}{1-\frac{1}{2}\alpha^2=\frac{1}{2}\beta^2}=(1+\tfrac{1}{2}\alpha^2+\tfrac{1}{2}\beta^2)\cos c-\alpha\beta.$$

Disprezzando ora il quadrato di x, si ha $\cos(c+x)=\cos c-x\,\text{sen}\,c$; dunque

$$x=\frac{\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos c}{\text{sen}\,c}.$$

E poichè x è del second'ordine rispetto ad α e β, si vede che in quest' ultimo valore di x non si sono disprezzate se non se le quantità del quart'ordine. Sia

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=p,\quad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=q,\ \text{ovvero}\ \alpha=p+q,\ \beta=p-q,$$

e si avrà sotto forma più semplice

$$x=p^2\left(\frac{1-\cos c}{\text{sen}\,c}\right)-q^2\left(\frac{1+\cos c}{\text{sen}\,c}\right)=p^2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c-q^2\cot\tfrac{1}{2}c.$$

Questo valore è espresso in parti del raggio; ma siccome in pratica p e q son dati in secondi, se si vuole che anche x sia espresso in secondi, converrà fare

$$x=\frac{p^2}{R}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c-\frac{q^2}{R}\cot\tfrac{1}{2}c,$$

ove R indica il numero di secondi contenuti nel raggio, numero il cui logaritmo è $=5,3038801$. Conosciuto che sarà x si avrà $C=c+x$.

La formola trovata è utile nelle operazioni di geodesia, per ridurre all'orizzonte gli angoli osservati nei piani inclinati; essa è più spedita e richiede delle tavole meno estese di quelle che richiede la formola del primo caso dei triangoli sferici, di cui abbiam dato un esempio (XCIII): Pertanto, se le elevazioni o le depressioni α e β fossero di più di 2 o 3 gradi, sarebbe più sicuro servirsi del metodo generale.

§ V. *Risoluzione dei triangoli sferici, i cui lati sono piccolissimi rispetto al raggio della sfera.*

CV. Quando i lati a, b, c son piccolissimi rispetto al raggio della sfera, il triangolo proposto differisce poco da un triangolo rettilineo; e, considerandolo come tale, se ne può avere una prima soluzione approssimata, ma con ciò si viene a disprezzare l' eccesso della somma degli angoli sopra 200°. Per avere una soluzione più approssimata, conviene tener conto di questo eccesso, il che può conseguirsi facilmente, mediante un principio generale che andremo qui appresso ad esporre.

Sia r il raggio della sfera sulla quale è situato il triangolo proposto, e s' immagini un triangolo simile tracciato nella sfera, il cui raggio sia l'unità; i lati di questo nuovo triangolo verranno espressi da $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, e si avrà

$$\cos A=\frac{\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\text{sen}\,\frac{b}{r}\,\text{sen}\,\frac{c}{r}}.$$

Ma poichè r è grandissimo rispetto ai lati a, b, c, si avrà in un modo approssimato (XXXV),

$$\cos\frac{a}{r}=1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{2\,.\,3\,.\,4r^4},\ \cos\frac{b}{r}=1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{2\,.\,3\,.\,4r^4}.$$

$$\cos\frac{c}{r}=1-\frac{c^2}{2r^2}+\frac{c^4}{2\,.\,3\,.\,4r^4},\ \operatorname{sen}\frac{b}{r}=\frac{b}{r}-\frac{b^3}{2\,.\,3r^3},$$

$$\operatorname{sen}\frac{c}{r}=\frac{c}{r}-\frac{c^3}{2\,.\,3r^3}.$$

Sostituendo dunque questi valori nell' equazione precedente, e disprezzando i termini che han più di quattro dimensioni in a, b, c, si avrà

$$\cos A=\frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2r^2}+\dfrac{a^4-b^4-c^4}{24r^4}-\dfrac{b^2\,c^2}{4r^4}}{\dfrac{bc}{r^2}\left(1-\dfrac{b^2}{6r^2}-\dfrac{c^2}{6r^2}\right)}$$

Moltiplicando ora i due termini di questa frazione per $1+\dfrac{b^2+c^2}{6r^2}$ e riducendo si avrà

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2\,b^2-2a^2\,c^2-2b^2\,c^2}{24bcr^2}.$$

Sia A' l'angolo opposto al lato a, nel triangolo rettilineo, i cui lati fossero in lunghezza eguali rispettivamente agli archi a, b, c, e si avrà

$$\cos A'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\text{e } 4b^2\,c^2\operatorname{sen}^2 A'=2a^2\,b^2+2a^2\,c^2+2b^2\,c^2-a^4-b^4-c^4.$$

Dunque

$$\cos A=\cos A'\ \frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen}^2 A'.$$

Facciasi $A=A'+x$, e, disprezzando il quadrato di x, si avrà

$$\cos A=\cos A'-x\operatorname{sen}A';$$

e paragonando questo valore di $\cos A$ col precedente si vede che

$$x=\frac{bc}{6r^2}\operatorname{sen}A';$$

or poichè x è del second' ordine rispetto a $\dfrac{b}{r}$ e $\dfrac{c}{r}$, ne segue che questo risultamento è esatto sino alle quantità del quart'ordine. Si avrà dunque

$$A=A'+\frac{br}{6r^2}\operatorname{sen}A'.$$

Ma $\frac{1}{2}\,bc\operatorname{sen}A'$ è l'area del triangolo rettilineo i cui lati sono a, b, c; e quest'area non differisce sensibilmente da quella del triangolo sferico proposto. Dunque se si dinoti con α l'una o l'altra di queste aree, si avrà

$$A=A'+\frac{\alpha}{3r^2},\ \text{ovvero}\ A'=A-\frac{\alpha}{3r^2};$$

similmente avrassi

$$B'=B-\frac{\alpha}{3r^2},\ C'=C-\frac{\alpha}{3r^2},$$

e conseguentemente

$$A' + B' + C', \text{ ossia } 200^{\circ} = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2}.$$

Si può dunque considerare $\frac{\alpha}{r^2}$ come l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sferico proposto sopra due angoli retti. Posto ciò si ha il teorema seguente, osservabile perchè riduce la soluzione dei triangoli sferici piccolissimi a quella dei triangoli rettilinei.

Teorema. *Essendo proposto un triangolo sferico i cui lati son piccolissimi rispetto al raggio della sfera, se da ciascuno dei suoi angoli si tolga il terzo dell' eccesso della somma de' suoi tre angoli sopra due angoli retti, gli angoli così diminuiti potranno esser presi per gli angoli d' un triangolo rettilineo, i cui lati sono in lunghezza eguali a quelli dell'angolo proposto*, ovvero in altri termini:

Il triangolo sferico pochissimo curvo, i cui angoli sono A, B, C, *e i lati* a, b, c, *corrisponde sempre ad un triangolo rettilineo, che ha i lati della stessa lunghezza* a, b, c, *e i cui angoli opposti sono* $A - \frac{1}{3}s$, $B - \frac{1}{3}s$, $C - \frac{1}{3}s$, *essendo* s *l'eccesso della somma degli angoli del triangolo sferico proposto sopra due retti.*

CVI. L'eccesso s, ovvero $\frac{\alpha}{r^2}$, e che è proporzionale all' area del triangolo, può sempre calcolarsi *a priori* per mezzo dei dati del triangolo sferico considerato come rettilineo. Così, se son dati due lati b, c e l' angolo compreso A, sarà l'area $\alpha = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$; se son dati da un lato a e i due angoli adiacenti B, C, sarà l'area $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B+C)}$. Si avrà poscia $s = \frac{\alpha}{r^2} R$, ove R dinota il numero dei secondi contenuti nel raggio, e così s verrà espresso in secondi.

Per applicare queste formole ai triangoli tracciati sulla superficie della terra, considerata come sferica (1), bisognerà supporre che i lati a, b, c, egualmente che il raggio r sieno espressi in metri. Or, poichè la quarta parte del meridiano $\frac{1}{2}\pi r = 10000000$ metri, sarà $\log r = 6{,}8038801$; inoltre il raggio R, espresso in secondi, à per logaritmo 5,8038801. Dunque se al logaritmo dell' area α, espressa in metri quadrati, aggiungasi il logaritmo costante 2,196119, e si tolgano quindi dieci unità dalla somma, si avrà il logaritmo dell'eccesso s espresso in secondi.

Conosciuto s si toglierà o si supporrà tolto $\frac{1}{3}s$ da ciascuno angolo del triangolo sferico proposto, e allora nel triangolo rettilineo formato dai lati a, b, c, e dagli angoli $A = A - \frac{1}{3}s$, $B = B - \frac{1}{3}s$, $C = C - \frac{1}{3}s$, si avranno i dati necessarii per determinare tutte le parti di esso triangolo rettilineo, e quindi quelle del triangolo sferico proposto.

---

(1) Nelle operazioni appartenenti alla geodesia i triangoli sono quasi sovente formati fra tre stazioni disugualmente lontane dal centro della terra; ma, mediante riduzioni convenevoli, si sostituiscono ai triangoli osservati i triangoli che risultano dalla proiezione delle stazioni sopra una stessa superficie sferica perpendicolare alla direzione della gravità.

CVII. *Esempio*. Sien dati l'angolo C, e i due lati a e b, cioè:

$$C = 123^{\circ}\ 19',\ 99'',\ 23$$
$$\log\ a = \quad 4{,}5891503$$
$$\log\ b = \quad 4{,}5219271,$$

e la quantità $\frac{1}{2}\ ab$ sen C, che rappresenta l' area del triangolo, avrà per logaritmo 8,75055, al quale aggiunto 2,19612 si avrà $\log \varepsilon = 0{,}97667$, e quindi $\varepsilon = 9'',48$, ed $\frac{1}{3}\ \varepsilon = 3'',16$. Posto ciò bisogna risolvere il triangolo rettilineo, del quale si hanno i due lati a e b dati come più sopra, e l'angolo compreso $C' = 123^{\circ}\ 19'96'',07$. A tal uopo seguiremo il metodo del n°. 56.

$$a \ldots\ldots\ 4{,}5891503 \qquad \text{tang}\ (\varphi - 50^{\circ}) \ldots\ldots\ 8{,}8878392$$
$$b \ldots\ldots\ \underline{4{,}5219271} \qquad \cot\ \tfrac{1}{2}\ C \ldots\ldots\ \underline{9{,}8381110}$$
$$\text{tang}\ \varphi \ldots\ 0{,}0672232 \qquad \text{tang}\ \frac{A' - B'}{2} \ldots\ldots\ 8{,}7259502$$
$$\varphi = 54^{\circ}90'74'',72 \qquad \frac{A' - B'}{2} = 3^{\circ}\ 38'\ 39'',27$$
$$\tfrac{1}{2}\ C' = 61\ 59\ 98,\ 03 \qquad \frac{A' + B'}{2} = 38\ 40\ \ 1\ \ 97$$
$$100^{\circ} - \tfrac{1}{2}\ C' = 38\ 40\ \ 1,\ 97 \qquad A' = 41\ 78\ \ 41,\ 24$$
$$B' = 35\ \ 1\ \ 62,\ 70$$

Rimane a determinarsi il terzo lato c, che si otterrà per mezzo dell' equazione $c = \dfrac{a \text{ sen } C'}{\text{sen } A'}$, da cui

$$a \ldots\ldots\ 4{,}5891503$$
$$\text{sen}\ A' \ldots\ldots\ \underline{9{,}7854893}$$
$$\text{differenza} \ldots\ 4{,}8036610 \qquad \ldots\ 4{,}8036610$$
$$\text{sen}\ C' \ldots\ldots\ \underline{9{,}9705008} \qquad \text{sen}\ B' \ldots\ \underline{9{,}7182661}$$
$$\log\ c = \ldots\ 4{,}7741618 \qquad \log\ b \ldots\ 4{,}5219271.$$

Gli elementi dunque del triangolo proposto sono

$$A = 41^{\circ}78'\ \ 44'',40$$
$$B = 35^{\circ}\ 1\ \ \ 65\ ,86$$
$$\log\ c = 4{,}7741618, \text{ ovvero } c = 59451^{m},256.$$

N. B. Il metodo dato in questo paragrafo può servire bensì a risolvere i triangoli nei quali due lati fossero pochissimo differenti da 200°, e il terzo lato fosse piccolissimo. Poichè, profungando i lati maggiori A'C, AB' (*fig.* 16) si avrà un triangolo sferico BCA, i cui tre lati saran piccolissimi.

§ VI. *Dei triangoli sferici, che han due angoli molto acuti.*

CVIII. Sia ABC (*fig.* 17) il triangolo sferico proposto, e sieno A e B due angoli acutissimi; sia dippiù LMN il suo triangolo polare, per modo che sia MN $= 200^{\circ} - A$, LN $= 200^{\circ} - B$. Se si prolungano gli archi MN, LN, sinchè s' incontrino in K, egli è chiaro che sarà KM$=A$, e KL$=B$; il triangolo LKM dunque avrà i suoi lati piccolissimi, e sarà nel caso d'essere risoluto col metodo del paragrafo precedente. Sieno A', B', C' i tre angoli, ed a', b', c' i tre lati del triangolo LKM, e si avrà

$$A' = \text{MLK} = a \qquad a' = \text{KM} = A$$
$$B' = \text{LMK} = b \qquad b' = \text{LK} = B$$
$$C' = \text{LKM} = 200^{\circ} - c \qquad c' = \text{LM} = 200^{\circ} - \text{C}.$$

Dunque tre elementi cogniti nel triangolo ABC, daranno altri e tanti nel triangolo LKM, ed altri e tanti per conseguenza nel triangolo rettilineo, al quale il triangolo LKM può essere ridotto: or risoluto questo triangolo rettilineo, si avrà nel tempo stesso la soluzione del triangolo LKM, ed anche quella del triangolo proposto ABC.

CIX. Sia per esempio, $A=3^0$, $B=2^0$, e il lato adiacente $c=150^0$; i dati del triangolo LKM, ovvero i dati $A'B'C'$ saranno rispettivamente $a'=3^0$, $b'=2^0$, e l'angolo compreso $C'=150^0$. Con questi dati si trova l'eccesso sferico

$$s = \frac{\frac{1}{2}\, a'\, b' \operatorname{sen} C'}{R} = 333'',21\,,$$

e togliendo da C' il terzo di s, si avrà per resto $49^0 98' 88'',93$. Convien dunque risolvere un triangolo rettilineo, i cui due lati sono $a'=30000''$, $b'=20000''$, e l'angolo compreso

$$C''=49^0\ 98'\ 88'',\ 93.$$

Fatti i dovuti calcoli si rinvengono gli altri due angoli, cioè

$$A''=103^0\ 64'\ 86,\ 33,\ B''=46^0\ 36'\ 24,\ 75,$$

e il terzo lato $c=21244'',\ 36$. Aggiungendo dunque $\frac{1}{3}\ s$ agli angoli A'', B'' del triangolo rettilineo, per avere gli angoli A', B' del triangolo sferico, si avrà per la chiesta soluzione

$$\begin{aligned} A' &= a = 103^0\ 65'97'',40, \\ B' &= b = \ \ 46^0\ 37'35'',82, \\ C=200^0 - c' &= 197^0\ 87'55'',64. \end{aligned}$$

§ VII. *Del poligono regolare di diciassette lati.*

CX. Termineremo le applicazioni del calcolo trigonometrico, esponendo la maniera di inscrivere il poligono regolare di diciassette lati colla semplice risoluzione di equazioni del secondo grado; nel che seguiremo l'eccellente opera di Gauss.

Facciasi l'arco $\frac{200^0}{17}=\varphi$; dico dapprima che si avrà l'equazione

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\cos 7\varphi+\cos 9\varphi+\cos 11\varphi+\cos 13\varphi+\cos 15\varphi=\tfrac{1}{2}.$$

In effetti si chiami P il primo membro di questa equazione, e lo si moltiplichi per $2\cos\varphi$; cambiando in seguito ciascun prodotto di due coseni in coseni di archi semplici in virtù della formola

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B),$$

si avrà così

$$2P\cos\varphi=1+2\cos 2\varphi+2\cos 4\varphi+2\cos 6\varphi\ldots+2\cos 14\varphi+\cos 15\varphi.$$

Or poichè $17\varphi=200^0$, si ha $\cos 2\varphi=\cos(200^0-15\varphi)=-\cos 15\varphi$, $\cos 4\varphi=\cos(200^0-13\varphi)\cos 13\varphi$, e così di seguito sino a $\cos 16\varphi=-\cos\varphi$.

Dunque

$$2P\cos\varphi-1-2\cos 15\varphi-2\cos 13\varphi-2\cos 11\varphi\ldots-2\cos 3\varphi-\cos\varphi,$$

ovvero

$$2P\cos\varphi=1+\cos\varphi-2P,\ \text{o pure}\ 2P(1-\cos\varphi)=1+\cos\varphi.$$

ed in fine $P=\frac{1}{2}$.

Posto ciò, divido la somma dei termini che compongono P in due parti, cioè:

$$\begin{aligned} x &= \cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\cos 7\varphi+\cos 11\varphi, \\ y &= \cos\varphi+\cos 9\varphi+\cos 13\varphi+\cos 15\varphi; \end{aligned}$$

si avrà in primo luogo

$$x + y = \frac{1}{2}.$$

Moltiplico inoltre i quattro termini di x per i quattro termini di y, e cambiando i prodotti de' coseni in coseni di archi semplici, ottengo, dietro le dovute riduzioni

$$xy = 2 (\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \ldots + \cos 16\varphi)$$

oppure $$xy = -2 (\cos 15\varphi + \cos 13\varphi + \cos 11\varphi + \ldots \cos\varphi)$$

o, in fine,

$$xy = -1.$$

Mediante queste equazioni si trova

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17},\ y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}:$$

Se ora si dividano nuovamente le somme x ed y in due parti, come segue, cioe

$$x = s + t \qquad\qquad y = u + z,$$
$$s = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi, \qquad u = \cos\varphi + 13\varphi,$$
$$t = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi, \qquad z = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi,$$

si troverà similmente

$$st = -\frac{1}{4}, \qquad uz = -\frac{1}{4},$$

per modo che si potranno determinare i quattro numeri s, t, u, z coll'aiuto di due nuove equazioni del secondo grado.

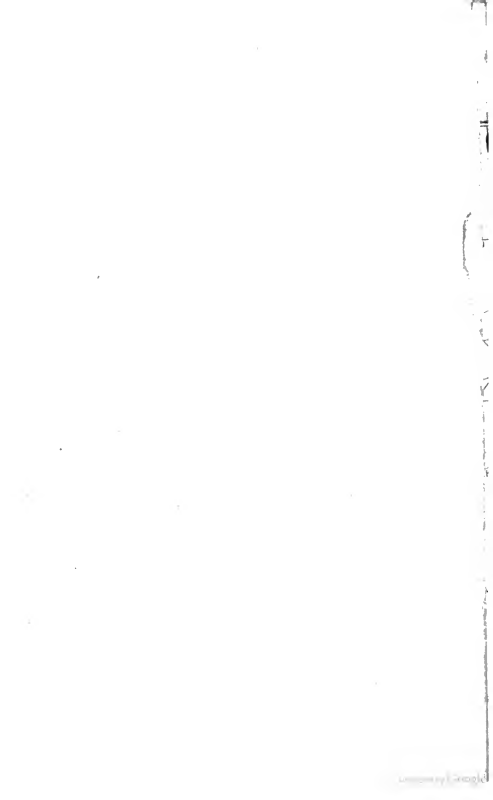
Finalmente conoscendo

$$\cos\varphi + \cos 13\varphi = u,\ \cos\varphi \cos 13\varphi = \frac{1}{2}(\cos 12\varphi + \cos 14\varphi) = -\frac{1}{2}(\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) = -\frac{1}{2}s,$$

si otterrà per mezzo di una quarta equazione del secondo grado, il valore di $\cos\varphi$, e da questo valore si conoscerà quello del lato del poligono proposto, il quale valore è $2\,\text{sen}\,\varphi$, ovvero $2\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$.

Il metodo con cui si è diretta la divisione di queste diverse equazioni, dipende da una teoria delicatissima, fondata sull'analisi indeterminata, il cui sviluppo bisogna vederlo nell'opera stessa del Gauss, o nell'*Essai sur la théorie des nombres*, seconda edizione. Si troverà in detta opera la dimostrazione completa di questo teorema bellissimo e generalissimo.

« Se il numero n è primo, ed $n - 1$ risulta dal prodotto dei fattori primi $2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma$ » ec., la divisione del cerchio in n parti eguali potrà sempre ridursi alla risoluzione di α equazioni del secondo grado, β del terzo, γ del quarto, e così di seguito »

FINE.

Legendre *Elementi di Trigonometria*